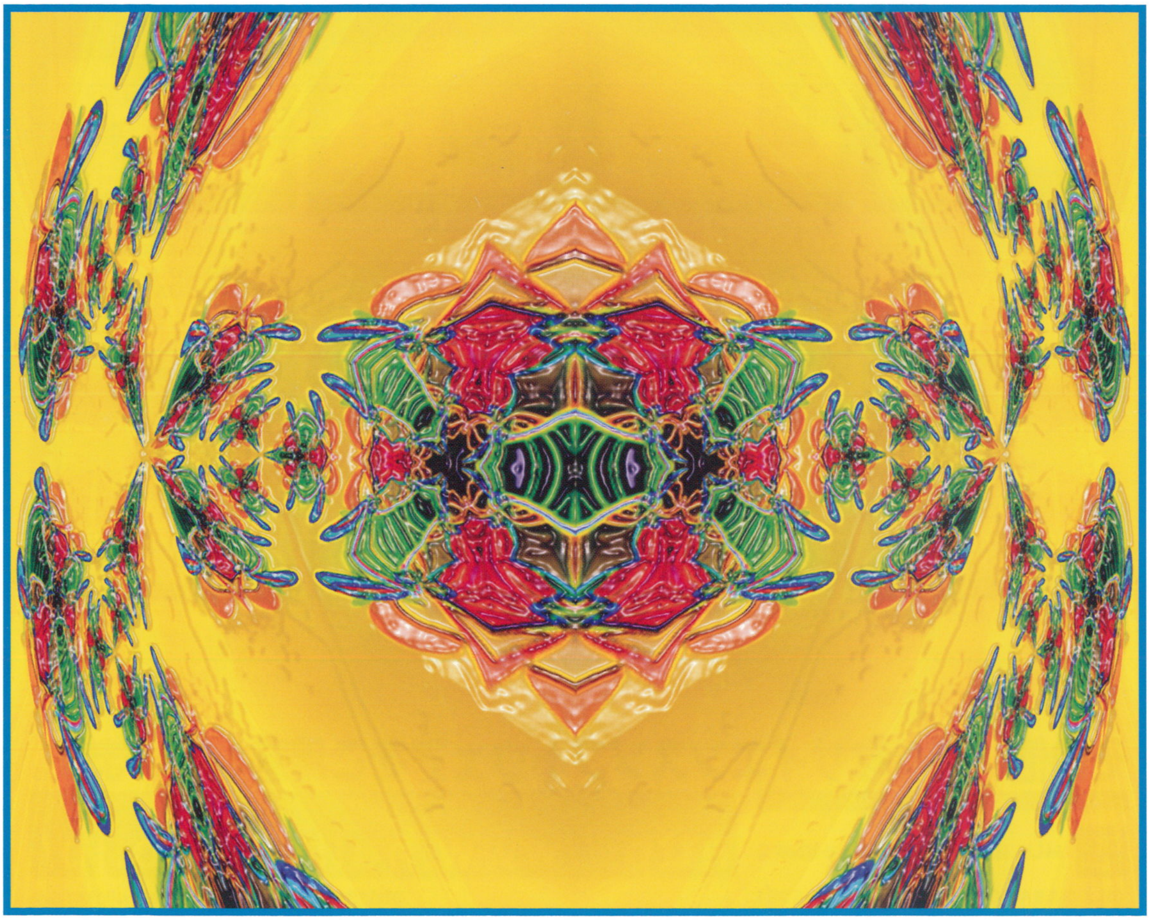
昭和38年７月２日第３種郵便物認可
2009年７月１日発行　第47巻７号　毎月１回１日発行
ISSN 0386—2240

数理科学

7
2009

特集
現代物理の世界像
素粒子と物性の対話



No.553

サイエンス社

MATHEMATICAL SCIENCES
Number 553 July 2009

現代物理の世界像
素粒子と物性の対話

表紙：戸川　隼人

お得な定期購読をおすすめします

毎号確実に御手元へ

地域によって書店店頭に陳列されない場合があります．**郵送料小社負担**にて確実に御手元へ届く定期予約購読をおすすめします．

予約購読は 1 年間（本誌のみ）11,000 円，1 年間（本誌＋別冊 2 冊）14,500 円，半年間（本誌のみ）5,500 円，半年間（本誌＋別冊 1 冊）7,250 円です．（税込み価格）

造本コストは更に上昇気味です．小社としてもあらゆる努力をもって廉価で提供してゆきたいと思っておりますが，定価改定の止むなき事態がかんがえられます．この場合予約購読期間中のものにつきましては料金据置きとなります．なお，臨時別冊のご注文については，本誌予約購読者の方には，商品到着後のお支払いにて承ります．

お申し込みは本誌とじ込みの振替用紙を御利用下さい．

数理科学特集一覧

63 年/7〜2006 年/8 省略
2006 年/9 ランダムネス
/10 ツイスター理論の拡がり
別冊 場の量子論の拡がり
/11 固有値問題のひろがり
/12 素粒子像の探究
2007 年/1 ヤング図形で遊ぶ物理と数学
/2 ランダム行列の広がり
/3 現代物理における超対称性
/4 現代数学はいかに使われているか［代数編］
別冊 双対性の世界
/5 数学の直観的理解
/6 物理における位相の世界
/7 代数的物理観
/8 数学における場の量子論
/9 ディラック
/10 フーリエ解析の力
別冊 素粒子物理学の発展
/11〈電弱統一理論〉
/12「時空」への問いかけ
2008 年/1 現象を視る
/2 ゲージ重力対応
/3 現代物理のための数学キーワード
/4 現代数学はいかに使われているか［解析編］
別冊 多様体の広がり
/5 物理と数学の難所
/6 線形代数の力
/7 物理的思考法のすすめ
/8 数の魅力
/9 トポロジカルな弦の世界
/10 ポアンカレ
別冊 対称性と保存則
/11 物理と論理
/12 確率論的物理観
2009 年/1 グラフィックでわかる物理
/2 発展する量子力学
/3 方程式に潜む対称性
/4 現代数学はいかに使われているか［幾何編］
別冊 代数学の魅力
/5 微積分を楽しむ
/6 現象と物理概念を結ぶ方程式

数理科学臨時別冊一覧

07 年/11 コンピュータ将棋の頭脳
07 年/12 計算神経科学への招待
08 年/1 演習 くり込み群
08 年/3 熱方程式で学ぶ逆問題
08 年/5 重力理論講義
08 年/6 代数幾何入門講義
08 年/7 ネットワーク科学への招待
08 年/9 物理のためのリー群とリー代数
08 年/11 量子暗号理論の展開
09 年/1 量子力学の考え方

「数理科学」のバックナンバーは下記の書店・生協の自然科学書売場で特別販売しております

紀伊國屋書店本店（新宿）
紀伊國屋書店新宿南店
あおい書店中野本店
オリオン書房ノルテ店（立川）
くまざわ書店本店（八王子）
くまざわ書店桜ヶ丘店（多摩）
書泉グランデ（神田）
書泉ブックタワー（秋葉原）
三省堂本店（神田）
ブックファースト渋谷店
リブロ池袋店
ジュンク堂書店（池袋）
ジュンク堂書店（新宿）
芳林堂（高田馬場）
八重洲ブックセンター（東京駅前）
丸善丸の内本店（東京駅前）
ブックファースト青葉台店（横浜）
栄松堂ジョイナス店（横浜）
有隣堂イセザキ町店（横浜）
有隣堂西口・東口（横浜）
有隣堂厚木店（厚木）
文教堂ブックセンター（川崎）
旭屋船橋店
戸田書店静岡本店
ジュンク堂大阪本店
紀伊國屋書店梅田店（大阪）
旭屋本店（大阪）
アバンティブックセンター（京都）
ジュンク堂書店（京都）
ジュンク堂書店（神戸）
ジュンク堂三宮駅前店（神戸）
ジュンク堂書店（大分）
喜久屋書店倉敷店
紀伊國屋書店松山店
紀伊國屋書店福岡店
紀伊國屋書店福岡本店
ジュンク堂福岡店
紀伊國屋書店新潟店
旭屋札幌店
金港堂（仙台）
金港堂パーク店（仙台）
ジュンク堂書店（仙台）
鹿島ブックセンター（いわき）
友朋堂（つくば）

――大学生協・売店――
東京大学 本郷・駒場
東京工業大学 大岡山・長津田
東京理科大学 新宿
早稲田大学 理工学部
慶応義塾大学 矢上台
電気通信大学・福井大学
筑波大学 大学会館書籍部 第一学群書籍部
埼玉大学
名古屋工業大学・愛知教育大学
大阪大学・神戸大学 ランス
京都大学・九州工業大学
東北大学 理薬・工学
室蘭工業大学
徳島大学 常三島
愛媛大学 城北
山形大学 小白川
島根大学
学習院大学 成文堂
北海道大学 クラーク店

July 2009 MATHEMATICAL SCIENCES Number 553

特集／現代物理の世界像

対談：現代物理の世界像

素粒子と物性の対話

阿部 龍蔵・米谷 民明

現代物理はとくに素粒子物理と物性物理の２つの分野によって大きく発展し，その広がりは様々な他の分野にも重要な影響を及ぼしてきました．素粒子物理は統一への志向，物性物理は多様性，といったそれぞれの発展によって，現代物理の世界像は描かれてきました．また両分野によって，将来どのような発展が期待されるかは，多くの研究者が非常に興味をもつところです．

今回の特集では，素粒子と物性という異なる学問分野の流れの中で，着実に育まれてきた代表的で基本的なテーマをいくつか取り上げ，分野を超えた多角的な見方が新しい進展をもたらすか等，様々な可能性について両分野の先生方に解説していただきました．

この巻頭では，両分野を代表して，阿部龍蔵先生（東京大学名誉教授）と米谷民明先生（東京大学大学院総合文化研究科）のお二人に，素粒子と物性，両分野の共通認識を通して，現代物理の新しい発展のヒントを模索するべく，互いの過去・現在・未来を語り合っていただきました．（編集部）

1．両分野のアナロジーから切り開かれる世界——素粒子と物性の相互作用

編集部：今回の特集で取り上げたテーマ（ゲージ場，繰り込み，双対性，理論と実験の関係性など）について，まずお話をお聞かせいただければと思います．

米谷：そうですね．まずゲージ場について言えることは，具体的な個々の現象の表れ方はもちろん違っているわけですが，例えば，電磁場のフォトン（光子）は物性でも素粒子でも共通して重要な相互作用を表すゲージ場です．フォトンを直接扱わないときでも方法論という意味では，ゲージ場という考え方を導入することによって，いろいろな現象を説明できますし，違った分野を研究していても，お互いにこの共通の言葉で学び合えて，歴史的にもいろいろ影響をし合って来たことは確かですね．

阿部：歴史的に物性と素粒子をつないだ人として，ノーベル物理学賞を受賞された南部陽一郎先生がいらっしゃいますよね．ゲージ場に直接関係はしていませんが，1957年の超伝導理論（BCS理論：Bardeen-Cooper-Schrieffer）とのアナロジーに関する理論が今の話に近いでしょうか．その前にもイジング模型に関する話もされていて，それが面白かったことはよく覚えていますね．わかりやすい論文で大変好印象を持ちました．

米谷：イジング模型の論文は，南部先生がまだ日本にいらっしゃったときのもので1940年代頃のものだったと記憶しています．確かに南部先生が



阿部龍蔵氏.

考えられた超伝導理論とのアナロジーは，カイラル対称性に関するものでしたから直接ゲージ対称性に関係しませんが，素粒子と物性の間に橋をかけたという意味で素晴らしい功績ですね．ノーベル賞の対象になった南部–ジョナラシーニョ模型というのは，カイラル対称性が自発的に破れることによって，超伝導理論でクーパーペアが凝縮して一見ゲージ対称性が破れるように見えるという話と似ているという理論で，今の話と非常に近いです．

阿部：“繰り込み” という言葉を聞くと，私はまず朝永先生の繰り込み理論の話を考えますね．ウィルソンの論文には「繰り込みは知らなくてよい」なんて書かれてあったのを覚えています（笑）．ですので，私は実際のところよく分かっていないことが多いのですが….

米谷：私も歴史的にはどこから始まっているのかはよく分かっていませんが，朝永先生の繰り込み理論は，電子の質量を観測量に繰り込んでしまって発散を打ち消す，ということで “繰り込み” と言われました．それをもっと物理的に考えてみると，結局はミクロの所からマクロの所までいろいろなスケールや自由度があって，それが全部覆いかぶさって最後に観測にかかるので，そのことをちゃんと考慮に入れて理論の結果と比較していく必要がある，という話で現在の理論の形に進められてきたと思います．最初の繰り込み理論というのは発散を処理する処方箋として考えられてきたわけですが，それがだんだん発展してきて，ウィルソンやカダノフによって物性のほうでもより深められてきて，素粒子の場の量子論にも影響してきました．これは，統計力学での相転移の話（とくに 2 次相転移）とも共通していて面白いですね．

阿部：双対性（デュアリティ）というのは，先ほどの話にも出ましたが，統計力学のイジング模型のクラマース・ワニアが典型ですね．

米谷：そうですね．デュアリティという概念は，元々はマクスウェル理論の電荷と磁荷の入れ替えもそうですし，本誌で特集したことのあるゲージ重力対応という話も，違う意味での双対性になりますね．

編集部：実験に関しては，素粒子では CERN の LHC 実験などビッグサイエンスになっていますが，物性ではそういったことはあまり聞きません．その辺りの違いなどについてもお聞かせいただけますでしょうか．

阿部：これは金銭的な問題もあると思いますよね．LHC は数千億円ほどかかっているんでしょうか．

米谷：そうですね．私もはっきりとは覚えていませんが，おそらくそのぐらいはかかっているでしょうね．一国でできることじゃありませんし，ヨーロッパだけでなく日本やアメリカも参加して国際協力しないとできないことです．素粒子の場合は結局エネルギースケールが非常に高いですから，どうしても膨大なエネルギーが必要ですし，実験データを解析するにも非常に大規模で手間がかかります．トンネルをつくったり，システムを構築したり，装置をつくるだけでも大変なものですよね．これは，調べる対象が 10^{-19}cm とかの極微のスケールですから当然そうなります．物性の場合は日常のスケールに近い世界ですから，その辺りが素粒子と基本的な違いになってくるのでしょう．現象を解明するという点ではお互い目標は同じですが，対象とするスケールが 10 桁から 20 桁ほど違っていることで，どうしても両者の実験に相違点が出てくるのだと思います．

編集部：両分野の理論的な進展がお互いの実験に影響を与え合っている，ということはあるでしょうか．

阿部：それはあるでしょうね．素粒子実験の周回トンネルには超伝導マグネットが使われていますからね．私が最初それを聞いたときはびっくりしました．

米谷：確かに超伝導を使わなかったらとても不可能なことでしょうね．何千アンペアという電流を流すわけですし，その熱量や冷却を考えても大変ですから，超伝導がなかったら素粒子の実験は難しいですね．ただ，これから先のことを考えると，素粒子に関しても違ったタイプの実験は考えられますね．ボース・アインシュタイン凝縮などのマクロな量子効果についての進展など，物性のほうで開発されている新しい話が素粒子のいろいろな現象の解明に使えて，昔じゃ考えられなかったような精度の上がった精密実験ができるかもしれませんね．また，これ以外の話では，量子ホール効果が微細構造定数を精密に決定することに役立ったという例も，両分野にとって非常に重要なことだと思います．

編集部：先ほどのお話では，ノーベル賞受賞者の南部陽一郎先生が発見された“自発的対称性の破れ”は物性の超伝導理論からヒントを得たということですが，それ以外のことで，素粒子と物性の間に見られるアナロジーやそこから発展した例などがあればお聞かせいただけますでしょうか．

米谷：例えば共形場の理論があると思います．これは20年ほど前に素粒子の場の理論のほうから研究されてきた話で弦理論にとっての「言葉」でもあるのですが，相転移とも関係するので物性のほうでも重要ですし，お互いに非常に共通した例だと思います．とくに数学のほうにも波及していますから興味深いですね．それと，先ほどの繰り込みの話とも関係が深いです．

阿部：格子モデルの話も，物性だけでなく素粒子でも聞きますよね．

米谷：そうですね．ウィルソンが1974年にゲージ理論として始めたのが最初で，それは物性でも



米谷民明氏.

統計力学に当然格子モデルがありましたから，先ほどのゲージ場の話と同様にアナロジーを活かした例ですね．こうした例は，方法論的にも概念的にも物性と素粒子のどちらの分野においても全く区別がつかないくらい共通の言葉として行き渡っていると思います．

阿部：それと，最近のコンピュータ・シミュレーションによる実験も，昔に比べると随分発達しましたね．

米谷：格子ゲージ理論のシミュレーションは，一番最初にやられたのは1979年頃にクロイツがおもちゃのようなモデルで10^4くらいの格子で小さな計算をしたのですが，それから考えると今はかなり進展したと思います．

阿部：超対称性という概念は，物性ではアンダーソン・ローカリゼーションなどの話がそれに関係していますね．

米谷：物性の場合は方法論的に導入している例が多くて，素粒子のように基本的なレベルで超対称性が成り立つとする例はないようですね．あってもいいのかもしれませんが．あと，これは最近気になっている話ですが，音波の系でブラックホールに近いような話を流体力学的に展開して，最近ではかなり実験的にも現実味を帯びる可能性が見えてきているようです．これは，ブラックホールのように直接実験室で作り出せないようなことに，

音波という直接実験できるところで同じ考え方を応用して解明したり，また先ほどちょっと触れたゲージ重力対応などをもっと進めれば量子ホール効果などの低次元の物性理論を高次元の重力理論で取り扱ったり，といった方法論をとることも可能になるわけですから，非常に広がりがあって面白いです.

編集部：概念や手法のアナロジー以外に，歴史的なアナロジーはどうでしょうか. 例えば過去において進展した例が現在の発見やモチベーションに活かされるようなことはあるでしょうか.

阿部：それは頻繁にあるでしょうね.

米谷：小規模な形でも結構あるでしょう. 例えば，先ほどのBCS理論は1957年に出てきたわけですが，もっと前に現象論的な話としてランダウ・ギンツブルクモデルなどがあって，それが超伝導のミクロな理論が出てきたことでより有効で価値のある理論として見直されたんですね. それ以外にも，素粒子でのヒッグス機構も超伝導のマイスナー効果を焼き直したような形になっていますから，物性で先に考えられたものが素粒子に活かされたり，その逆もありますよね.

2. 両分野に精通するには何が必要か？

編集部：素粒子物理で重要とされる特殊相対論や量子力学はシンプルで美しい理論体系ですが，物性物理で重要とされる熱力学や統計力学は多自由度を扱うだけに非常に多様性があって面白いかと思います. 両分野の特徴をうまくつかんで，南部先生の話のように両方に精通できるようになるにはどんな心がけや習得が必要でしょうか. とくに，最近の学生は割合早い時期に専門分野を特定している傾向もあるようですので，その辺りの参考になればと思うのですが.

阿部：私が学生の頃は，素粒子か物性かといった厳密な区別はなかったですね.

米谷：私の頃も同じですね. 実験の場合は素粒子と物性の区別はあったと思いますが，理論の場合は最初から区別をしないでM1の間は，物性も素粒子も一つの大部屋で勉強していましたし，その後半になってから大体の方向付けを決めていましたね. 大学院の推薦書も，私は物性の先生に書いていただきました.

編集部：逆に言えば，昔のほうが両分野を長く学ぶ機会があったとも言えますね.

米谷：そうですね. 最近は分けてしまっている傾向が強いと思います. 大学院を志望する段階で大体の研究室を決めて物性か素粒子を決めていますね.

阿部：私の頃は大学院での講義というのもほとんどなかったですよ.

米谷：私の世代は多少はありましたけれど，今はカリキュラムがちゃんとあって，そこで物性や素粒子などを学ぶ選択の幅はあるとは思いますが，学生の傾向として最初からテーマを決めてしまっているように感じますね. 例えば，場の量子論は物性も素粒子も本来区別はありませんから，学ぶ上でも広い視野のもとでやることで理解が深まると思います.

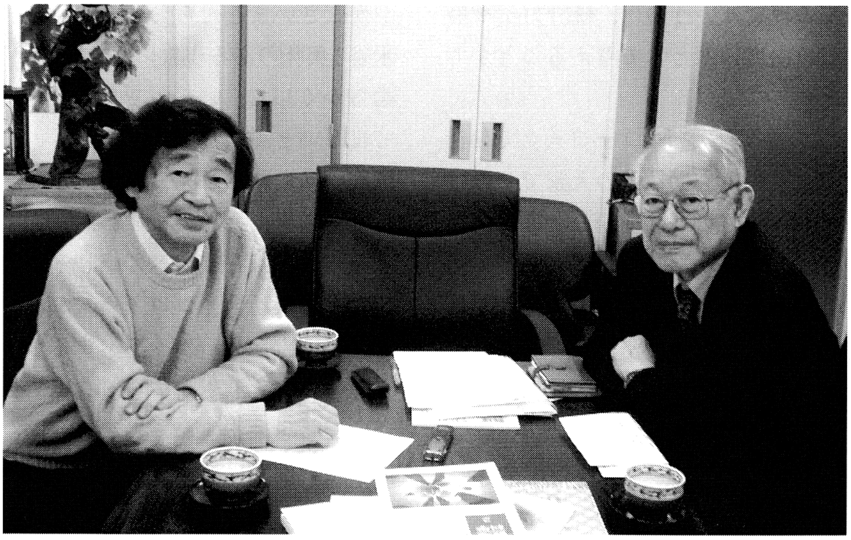
編集部：場の量子論で言えば，物性と素粒子では添え字の表記法などに違いがあったり，物性の場合は相対論の知識があまりいらなかったり，といったケースがあると思うのですが，そうした違いも含めて両方から興味をもって学んでみることで，それぞれの良さが分かるということですね.

阿部：そうでしょうね.

米谷：そうだと思います. 学部の段階でも物理そのもののメカニズムには面白いものがたくさんあって，それが素粒子や物性にそれぞれ関係が深い所があるわけですから，それらの考え方をよく習得していけばいろいろな所に応用ができるのだと思います. 南部先生は物理自体に興味を一番もたれていたからこそ，素粒子も物性もいろいろなことをおやりになったのだと思いますね.

阿部：南部先生は本当に素晴らしいと思いますね. 私の指導教官だった市村浩先生は南部先生と同級生なのですが，興味の自由度が広いと言うか，いろいろな逸話を聞かせていただきました.

米谷：私もいつお会いしても若々しいなあと思い



ますね．考え方や興味の持ち方が本当に広いです．そうした点も見習うべきところだと思います．

3. 進路決定の動機・きっかけ

編集部：先ほどのお話を伺いますと，先生方は大学院までは素粒子も物性もあまり区別なく勉強されていらっしゃったようですが，最終的に物性と素粒子の方面にそれぞれ進もうと思われたきっかけや動機をお聞かせいただけますでしょうか．

阿部：私の場合は，物性のほうがつぶしがきく，といったことで決めていたようなところもありましたね（笑）．

米谷：その傾向はあったかもしれませんね．私の頃でも確かに，素粒子に行ってしまったら会社に就職できない，なんて言われてましたから（笑）．

阿部：今はどうなんでしょう．素粒子をやっていて不利だなんてことはあるんですか．

米谷：今はあまり関係ないようですね．博士課程を出てからでも一般企業に就職できますから．

阿部：そうですか．最近のノーベル物理学賞のニュースもそうですが，米谷先生の頃は，朝永先生がノーベル賞を受賞された影響はあったんじゃないですか．

米谷：あれは私がちょうど大学1年になったときで，まさにその方向に目を向ける一つのきっかけにはなりましたね．もともと私は高校生の頃からアインシュタインに憧れていましたので，そういうことはやりたいと思っていました．

阿部：私の頃は湯川先生でしたね．ちょうど高等学校の3年のときに湯川先生がノーベル賞を受賞されましたので，友人でも数学を志望していたのに突然物理に変えた人もいましたよ．

米谷：私も，素粒子をやるということに関しては湯川先生や坂田先生の影響は大きいですね．逆に大勢の人が素粒子に行くというので自分は物性に行く，といったような，反動で進路を選ぶ人もいると思います．

阿部：そういうこともあるでしょうね．私は最終的には大学を出た時点で物性の方向に決めていましたね．

米谷：私は大学4年の頃には素粒子のほうに行くことを大体決めていました．

編集部：最近では，両分野の中から生物や情報，経済，工学といったさらに別の分野に進出していくケースもよく聞きますが，そのあたりはどうでしょうか．

米谷：物性理論の人が情報のほうに行く傾向は多いでしょうね．共形場理論などで有名なヴィラソロは最初は素粒子でしたけど，1980年代頃からは脳の理論のほうに行きましたね．

阿部：確かに脳の理論というのは，統計力学や場の理論でも無限自由度の系として考えることができますからね．

米谷：私が20代の終わり頃にニューヨークでお世話になった崎田文二先生も素粒子の大家でしたけれど，60歳頃からは物性の多体問題なども研究されましたね．

編集部：そうしますと，先ほどの話にもありましたが，あまり最初から幅を狭めず，物理以外にもいろいろな現象に興味をもつことが大切だということですね．

4. 両分野に精通した人物

編集部：これまでの話では，素粒子と物性にはかなりの共通項があることがわかりましたが，両分野に精通した重要な人物についてお聞かせいただけますでしょうか．

米谷：朝永先生は量子電気力学のあとは多体問題もされていましたし，朝永・ラッティンジャー模型もそうですが，原子核の集団運動などいろいろ研究されていました．あと伏見康治先生も興味の幅が広くて，湯川先生とも交流がありましたし，南部先生の回想録にもいろいろ逸話が紹介されています．

阿部：そうですね．伏見先生は研究の幅が広くて面白いですね．

編集部：ブラックホールでも有名なホイーラーも，量子情報で先駆者的な仕事をされていますね．

米谷：そうですね．とくに一般相対論の量子化に関する先駆者ですし，ボーアとも原子核に関する仕事をしていますね．最近ではウィルソンもそういった人だと思います．

5. 伝えたいメッセージ

編集部：最後になりますが，素粒子と物性それぞれの分野に進もうと考えている，もしくは迷っている学生や，現在研究中の後進の人たちにメッセージがございましたらお願い致します．

米谷：興味のある現象には分野にとらわれず，頭を柔らかくして，いろいろなものを取り入れていってほしいと思います．

阿部：私も同じ意見ですね．分野にとらわれないことが大事だと思いますね．

米谷：あとは昔に比べて感じる傾向ですが，大学院などで談話会やコロキウムがあって，いろいろな分野の方がせっかく話をするのに，分野が違うと聞きに来る学生が少なくなってしまうのは勿体ないなと思いますね．異なる分野の人の話をよく聞くというのは非常に大切なことです．細かいことは分からなくてもキーポイントを自分なりにつかんでいくという努力は必要ですし，それが後に自分自身が他分野の人に話をするときに活きてくると思います．

阿部：私が放送大学にいたときの経験では，科学史に興味をもっていた人が多かったですね．最近の学生はどうなんでしょう．

米谷：最近の学生はあまり歴史に興味をもたない傾向を感じますね．物理の面白い考え方がどうして出てきたのかということは，やはり歴史を学ぶことで学べますから，そういった意味ではバランス感覚が大切なんだと思います．最近はゲーム感覚というか，与えられたことだけをパターン化して面白がってやっている人が増えているように感じます．

阿部：そうですね．ゲーム感覚というのは私の頃にはなかったことですが，今はそういう傾向はあるでしょうね．

米谷：研究者になる上でも，バランス感覚をもって，いろいろなアイデアの起源などにも目を向けることが大切ですね．それによって，自分のオリジナルなアイデアも見えてくるのだと思います．

編集部：本日は貴重なお話をお聞かせ下さり，誠にありがとうございました．

（2008年11月，千駄ヶ谷サイエンスビルにて）

（あべ・りゅうぞう，東京大学名誉教授）
（よねや・たみあき，東京大学大学院総合文化研究科）

光から始まったゲージ場

素粒子を語る深遠な言葉

坂井　典佑

1. ゲージ場は光から始まった

天地創造の時代にさかのぼらずとも，光は古くから人類が親しんできたものである．**ゲージ場**の歴史はこの**光**から始まった．電気や磁気の研究は19世紀に大きく発展して，マックスウェル方程式という形にまとめられ，古典電磁気学が完成した．マックスウェル方程式は，電場と磁場の振動が波となって伝播することを予言した．この**電磁波の一種**だとして光を説明できることが，多くの研究者の努力によって確立した．光の速度を測定する研究から相対性理論が誕生し，時間の概念を革命的に変えたことはよく知られているが，それとは別に，ここでは，光のゲージ場としての側面に焦点を当ててみよう．光から始まったゲージ場が，今や標準模型を初めとする**素粒子の記述の根幹**をなす不可欠の言葉となっている．ゲージ場は物理的な観測可能量と非物理的な量とが巧妙に組み合わされた，深く豊かな言葉であるという事実の一端を，お伝えしたいものである．

磁場は3成分のベクトル・ポテンシャルで記述でき，電場を記述するにはスカラー・ポテンシャルが必要である．これらを合わせると電磁場は4つの自由度を持つ**4成分ポテンシャル** $A_\mu, (\mu = 0, 1, 2, 3)$ という**場**で記述される．図1のように，光の実体は，電場と磁場が互いに関係しながら，進行方向に垂直に振動して光速度で伝播していく**横波**である．電場と磁場は互いに関係しているので，進行方向に垂直な2自由度が光の自由度である．このように，電場・磁場を記述するはずの4成分のポテンシャルには，不必要に多くの自由度 $(4-2=2)$ が含まれている．

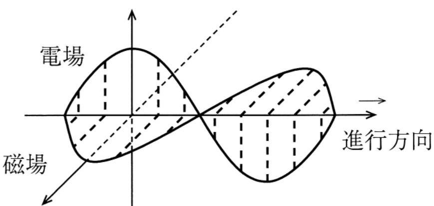


図1　光は横波.

（相対性理論に従い）電場と磁場をまとめて表すと，2階反対称テンソル場 $F_{\mu\nu}$ になり，それらを4成分ポテンシャル A_μ で表すと，

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu. \tag{1}$$

電場や磁場は観測される力そのものだが，ポテンシャル A_μ は(1)式で微分を通じて定義された量なので，スカラー関数 Λ の微分だけ異なるポテンシャルでも同じ電場・磁場 $F_{\mu\nu}$ を与える．

$$A_\mu \to A'_\mu = A_\mu + \frac{1}{e}\partial_\mu \Lambda. \tag{2}$$

ここで後の便宜のために電磁結合定数 e を入れて変換を定義した．この変換を**ゲージ変換**と呼び，ゲージ変換して不変であることを**ゲージ対称性**と言う．このように，**ポテンシャルでの記述が余分な自由度を含む**という事実を表すのが，古典電磁

気学でのゲージ対称性である．

以上の推論から電磁気学にゲージ対称性があることは分かったが，逆にこの事実をもっと積極的に用い，ゲージ対称性を原理として仮定することで，電磁気学そのものを導くこともできる．これが**ゲージ原理**の立場である．

2. ゲージ原理は電磁気学を与える

電荷を数えるには，電荷を持つ場 ψ の位相を回転させてみるとよい．

$$\psi(x) \to \psi'(x) = e^{-i\Lambda}\psi(x). \tag{3}$$

電荷が保存する場合，この変換の下で理論は不変になる．しかし，時空のどの点でもこの位相回転をいっせいに同じだけ行わねばならないというのは，不自然だと思われる．そこで，この位相回転のパラメター Λ が時空点の座標 x に依存しても，依然として理論が不変であるべしと要求してみよう[1]．しかし，運動エネルギーは場の微分 $\partial_\mu\psi$ の2乗を含む．図2のように，微分 $\partial_\mu\psi$ には場 $\psi(x)$ の隣り合う時空点での位相回転の微小な違いが効いてくるので，不変性を保てない．その微小な違いは，回転パラメターの時空での微分 $\partial_\mu\Lambda$ に比例する．微分はベクトル量なので，その違いを打ち消して全体として対称性を保つには，ベクトル量の場 $A_\mu(x)$ を導入する必要がある．すなわち，ゲージ場を加えた微分が座標に依存する位相変換の下で場そのものと同じ振舞いをするように要求すると，

$$(\partial_\mu + ieA'_\mu)\psi' = e^{-i\Lambda(x)}(\partial_\mu + ieA_\mu)\psi. \tag{4}$$

$A_\mu(x)$ の変換性は (2) 式と一致する．この要請を

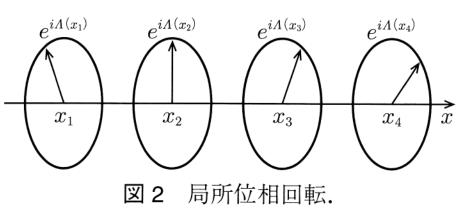


図2　局所位相回転．

出発点として，電磁場のポテンシャル $A_\mu(x)$ の存在だけでなく，電磁気学のすべての帰結を導くことができる．したがって，**時空に依存する位相回転不変性が電磁気学を与える原理**と言ってよい．このように時空に依存する変換性を**局所的な変換**と呼び，局所的変換の下で不変であれという要求が**ゲージ原理**である．この原理の結果，電荷を持つ場があれば，共変微分 (4) 式を通じて，ゲージ場の相互作用も決まる．

「ゲージ」という言葉は，ワイル（Weyl）が重力と電磁気学を統一して説明する試みを行ったときに導入した言葉から来ている．彼の試みは位相回転ではなく，長さのスケール（**ゲージ＝ものさし**）を変える変換を使ったので，うまくいかなかった．しかし，彼の提唱した言葉だけは生き残り，ゲージ理論という名前が生まれた．

3. 非アーベルゲージ理論

変換を次々行っても新たな変換になる．このように変換を続けて行う操作を掛け算と考えた場合，変換全体は**群**をなすと言う．電磁気学を導くための変換は位相回転だった．位相回転では2つの変換の順序を入れ替えても同じ結果になる．このような場合は**アーベル群**と呼ばれる（可換群とも言う）．変換の順序を入れ替えると結果が異なる場合が，**非アーベル群**で，これに基づくゲージ理論を**非アーベルゲージ理論**と呼ぶ．

ヤン（Yang）とミルズ（Mills）は1954年に電磁気学を拡張して非アーベルゲージ理論を提案した[2]．同時期にわが国でも内山龍雄氏が同じ結果を得たことが知られている．

最も簡単な非アーベル群は，3次元の空間回転である．図3のように，3軸上の点を回転してみよう．先に2軸周りに90度回転，次に1軸周りに90度回転した結果は1軸上にある．逆に，先に1軸周りに90度回転，次に2軸周りに90度回転した結果は2軸上（の負の方向）にある．この場合は，変換の結果得られた点は異なり，たまたま3軸周りの90度回転で一致する．このよう

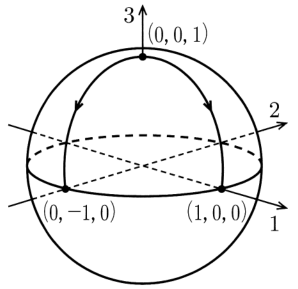


図3 1軸・2軸回転の交換子は3軸回転となる.

に，3次元回転では，一般に変換の順序を変えると結果が異なる．これは2つの無限小回転の演算子が交換しないということを意味している．3つの空間方向 1, 2, 3 軸の周りの無限小回転操作の演算子を L_1, L_2, L_3 と表すと

$$[L_i, L_j] \equiv L_iL_j - L_jL_i = i\varepsilon_{ijk}\hbar L_k. \quad (5)$$

ここに現れた ε_{ijk} は，ijk が 123 の偶置換のときに 1，奇置換のときに -1，それ以外の場合は零になる数テンソルである．これは3次元回転群の構造を表す定数で，群の構造定数と呼ばれる．このように非アーベル群では，**無限小変換の演算子が交換しない**．非アーベル群を用いたゲージ場は**非アーベルゲージ場**と呼ばれる[1)]．3つの無限小回転 L_1, L_2, L_3 に対応して3つの異なるゲージ場 A^1_μ, A^2_μ, A^3_μ が生じる．

これに応じて，(1) 式で定義されたアーベル群の場合の場の強さも非アーベル群では拡張されて

$$F^i_{\mu\nu} = \partial_\mu A^i_\nu - \partial_\nu A^i_\mu - g\varepsilon_{ijk}A^j_\mu A^k_\nu. \quad (6)$$

ここで非アーベルゲージ場の結合定数を g と書いた．より一般の群の場合は ε を該当する群の構造定数で置き換えればよい．ゲージ場のラグランジアンはこの場の強さ $F^i_{\mu\nu}$ の2乗で与えられる．$\partial_\mu A^i_\nu - \partial_\nu A^i_\mu$ 項の2乗は場の2次なので，自由粒子を表す．$g\varepsilon_{ijk}A^j_\mu A^k_\nu$ 項が含まれると場の3次またはそれ以上となるので，**ゲージ場 A^i_μ の間の相互作用**を与える．この事実は非アーベルゲージ場自身が非アーベルゲージ群の「電荷」を持つために，ゲージ場と相互作用するとして理解できる．このように，非アーベルゲージ理論の最も重要な特徴は，**ゲージ場どうしが相互作用する**ことである．

自然界には強い力・電磁気力・弱い力・重力という4つの基本的な力がある．これらすべての力には，ゲージ原理という共通の原理が働いていることが，今日ではわかっている．強い力に対するゲージ粒子は**グルーオン**，電磁気力に対するゲージ粒子は**光子**，弱い力に対するゲージ粒子は **W 粒子**と **Z 粒子**と呼ばれる．これらの3つの力を今のところ実験事実と矛盾なく記述できる理論として，**標準模型**ができている[1)]．一方，重力は量子論としてはまだ十分な理解ができていないが，ゲージ原理が適用できることが内山龍雄氏によって指摘された．

4. ゲージ理論の歴史的変遷

標準模型の中核をなす非アーベルゲージ理論が，自然界の記述の中心的な言葉として受け入れられるまでには，多くの歴史的変遷があった．ヤンとミルズが非アーベルゲージ理論を提案した1954年頃は，強い力の実験が大きく進んだ時代であった．ロー粒子やオメガ粒子などのベクトル粒子が発見され，それらが強い力の解明に重要な役割を果たすと期待されていた．これらのベクトル粒子を説明することこそ，当時の彼らの提案の動機であった．しかし，光子の場合と全く同じように，非アーベルゲージ理論のゲージ粒子の質量が0でなければならないことに，彼らも提案当初から気が付いていた．この点を改良しようと，長い間多くの人が試みたが，ゲージ粒子の質量を有限にすることはできず，いったん非アーベルゲージ理論は忘れられたようになっていた．

図4のように，スカラー場のポテンシャルの安定点が中心軸上にない場合，安定な状態は回転対称

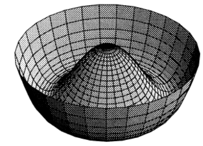


図4 自発的対称性の破れを起こすポテンシャル.

表１　ゲージ原理に基づく力．

力	ゲージ粒子	ゲージ群
強い力	グルーオン	$SU(3)$
弱い力	W 粒子，Z 粒子	$SU(2)$
電磁気力	光子	$U(1)$
重力	重力子	

性を保たない．これが南部陽一郎によって導入された**自発的対称性の破れ**である．さらに，ゲージ場がこのようなスカラー場と結合すると，ゲージ粒子が質量を獲得する．これが**ヒッグス機構**である．非アーベルゲージ理論の適用対象を強い力から弱い力に変更し，このヒッグス機構を活用して，グラショー（Glashow）・ワインバーグ（Weinberg）・サラム（Salam）は，**電弱統一理論**を考案した．それでも，この理論が多くの研究者の信頼を得るためには，トフーフト（'tHooft）らによって非アーベルゲージ理論の**くりこみ可能性**が示されることが必要だった．予言通りの質量を持つ **W 粒子とZ 粒子の発見**という実験事実が，**標準模型の確立**に最後に最も決定的な役割を果たしたのは，もちろん言うまでもない．自然界の記述が将来さらに変更されるとしても，現在までのエネルギーの実験事実に関しては，標準模型の予言から大きく外れてはならないということが，こうした実験事実によって確定したのである．

ここまでに得た結果をまとめておこう．自然界の基本的な力には，ゲージ原理が背後にある．ゲージ場が物質の間にキャッチボールのようにやり取りされ，その結果，物質の間に力が働くと考えられる．その意味で，ゲージ場は**力を媒介する粒子**とも呼ばれる．自然界に存在する４つの基本的な力と，その力を媒介するゲージ場を表１にまとめた．

5. 赤外発散：ゲージ場は観測可能か？

ゲージ理論が今日の素粒子理論の根幹をなしていることを概観したので，これからもう少し概念的な問題に進みたい．そもそも古典論でのゲージ場は，ポテンシャルでの記述が物理的な電場や磁場以外に余分なものを含むという事実から出発した．そこで，ゲージ場は**物理的に観測可能な実在か**どうかを問い直して見よう．

相対性理論によると，もし質量 m が0でなければ，どれほど運動量を大きくしても速度は必ず光速度より遅い．一方，運動量０になると，エネルギーは静止エネルギー mc^2 に一致する．逆に質量０の場合は，常に光速度で走り（静止できない），エネルギーは運動量に光速度を掛けた値になる．

光は確かに観測可能な実在である．光にもいろいろな振動数のものがあり，それによって色や透過力などが決まる．量子力学によると，光は振動数に比例したエネルギーを持つ粒子，**光子**として振る舞う．電磁気学によれば，光は光速度で走るので，**光子の質量は０**である．したがって，光子の運動量が０になると共にエネルギーも０になる．

問題はこの無限小エネルギー光子の観測可能性である．この問題は，電磁気学の場の量子論である量子電磁力学の計算で多くの研究者を悩ませた．例えば，１個の電子が陽子などに散乱される場合を考えよう．終状態に１個の電子しか存在しない確率を計算しようとすると，発散し，意味のない答えになる．この現象を**赤外発散**と呼ぶ．この場合問題設定そのものが間違っているというのが，実は正しい答えである．電子が１個だけで，無限小エネルギーの光子を伴わないことを確認するには，無限に精密な実験が必要となるが，これは現実には無理な相談である．図５のように，実際の実験のエネルギー分解能を考慮に入れて，その範囲内の光子ならばいくらたくさん伴っていても構わないという確率を計算すると，確かに発散は消しあっていて，有限の量になることが分かる．結

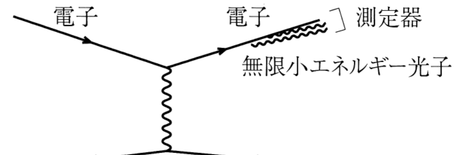


図５　無数の無限小エネルギー光子を許すと赤外発散はない．

局，**無限小エネルギー光子の個数**というのは，もともと無限大になるべき**無意味な量**であって，観測できない量を考えたため発散したのである．このように，赤外発散は，実験条件を適切に考慮に入れなければならないことを示す例であった．これに対して，高いエネルギーの効果から来る紫外発散は，朝永・ファインマン・シュビンガーのくりこみ理論によって処理しなければならない，非物理的な発散であり，実験条件とも無関係である．

6. 閉じ込め：ゲージ場は観測可能か？

量子効果によってゲージ相互作用などの有効な結合定数（くりこまれた結合定数）が距離と共に変化する．まずこれを直感的に説明しよう．

量子力学の**不確定性原理**によれば，観測時間 Δt に応じてエネルギーの不確定性 ΔE は少なくとも

$$\Delta E \geq \hbar/\Delta t \tag{7}$$

だけある．不確定性原理から，質量 m の粒子とその反粒子の対生成は，$\Delta t \leq \hbar/(2mc^2)$ という程度の短時間であれば，真空中でもエネルギー的に可能である．この生成消滅が真空中で常時起こるので，真空中には粒子・反粒子が満ちている．その中に一つの正電荷を置いたとしよう．図 6 に描いたように，一時的に生成消滅している電荷が周りに満ちていると，真空中に生じた電荷のうちで正の電荷は，原点に置いた正電荷に反発されて外側へ押し出される．逆に，真空中に生じた負の電荷は，正電荷に引き付けられて原点近くへ集まる．この現象を**真空偏極**と言う．

真空がこのように偏極を起こす結果，原点からある距離の範囲に含まれる電荷の総量を考えると，

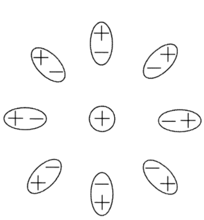


図 6　真空分極で有効結合定数が変化する．

それは原点に置いた正電荷よりも小さくなる．この効果は考える範囲が広いほど大きくなるから，原点の正電荷から遠く離れるほど，電荷の大きさは小さく見える．大きな距離は波長の大きな波で測定できる．波長の逆数が運動量なので，遠距離は低エネルギーでの測定に対応する．逆に高エネルギーは，正電荷に近づいて電荷を測定することに対応し，電荷は大きく見える．このように，距離によって有効な結合定数の大きさが変わることを結合定数が「走る」と言い，変化する結合定数を**有効結合定数**とか，**走る結合定数**と呼ぶ．電磁気力を記述する $U(1)$ ゲージ理論の場合には，ここに述べた直感的な説明通り，短距離で結合定数が大きくなる．

ゲージ対称性は，ゲージ理論が余分な自由度を含む記述であることを意味していた．この結果，ゲージ場の量子論には非物理的粒子の寄与が登場する．たまたまアーベルゲージ理論では，この非物理的粒子は他の粒子と相互作用しないので，無視することができた．しかし，非アーベルゲージ理論では，ゲージ場そのものが非アーベルゲージ群の「電荷」を持つため，量子効果に非物理的粒子が効いてくる．この結果，非アーベルゲージ理論だけは，上に述べた直感的結果が成り立たず，逆になる．したがって，余りにも多数の物質場が理論の中にある場合を除けば，**非アーベルゲージ理論の有効結合定数は，短距離で小さくなる**．この性質を**漸近的自由性**と言う．グロス（Gross）・ウィルチェック（Wilczek）・ポリツアー（Politzer）が，1973 年に非アーベルゲージ理論が漸近的自由であることを発見し，2004 年にノーベル賞を受賞した．

強い力が働く物質の基本構成粒子はクォークと考えられている．しかし，クォークやグルーオン（強い力のゲージ粒子）を単体で取り出すことは誰も成功していない．これらすべての実験事実はクォークやグルーオンが**閉じ込め**られて，単体で存在できないことを示唆している．

強い力の場合，非アーベルゲージ対称性が破れていないと考えられている．強い力の非アーベルゲージ理論は漸近的自由だから，力は短距離で弱

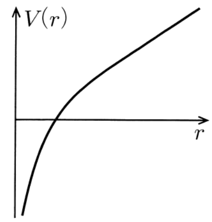


図7　クォーク間の閉じ込めポテンシャル．

くなるが，**長距離で強く**なる（図7）．非アーベルゲージ群の「電荷」を持つクォークやグルーオンは，遠くへ引き離そうとすればするほど引力が無限に強くなって，閉じ込められてしまうのだと推測できる．閉じ込めが成り立てば，クォークやグルーオンは観測不可能な非物理的粒子となり，非アーベルゲージ群の「電荷」を持たない（複合）粒子だけが観測可能な物理的粒子となる．「閉じ込め」が起こると，「非物理的な場を含む余分な記述」というゲージ対称性の出発点となった側面が，新たな深い意味で顔を出す．

精密な力学的計算をして，閉じ込めを万人に納得のできる形で証明することが永年の懸案である．今まで場の量子論では，結合定数が小さい場合にのみ，結合定数のべき級数展開を用いる**摂動論**で精密計算が可能であった．閉じ込めのような強結合の場の量子論には，**非摂動的方法**がぜひとも必要だが，**格子ゲージ理論**と**大規模計算機**を駆使した取扱いが進展している．

7. 超対称ゲージ理論の非摂動効果

量子論では，同一粒子の入れ替えに対して，波動関数が逆符号になるフェルミ粒子と，変わらないボース粒子がある．ボース粒子とフェルミ粒子の間の対称性が**超対称性**である．超対称ゲージ理論・超対称弦理論を用いて，非摂動効果の研究が近年大きく進展した．例えば，4次元のゲージ理論の**低エネルギー有効理論の厳密解**が得られ，それを用いて，閉じ込め機構に関する年来の予想を明確に示すことができた．超対称ゲージ理論の研究から得られた新たな知見の例を以下に紹介しよう．

非アーベルゲージ理論でゲージ対称性が破れなければ閉じ込めが起こり，このとき非アーベルゲージ群の「電荷」を持つ粒子は観測にかからない．ここから，ゲージ理論の意義について，「ゲージ対称性は観測にかからないのだから，ゲージ対称性は物理的な対称性ととらえるべきではない．」という新しい見方が得られる．局所ゲージ変換以外の**大域的対称性**は直接観測でき，物理的である．例として，N_f 種類のクォークが $SU(N_c)$ ゲージ場と相互作用している系に，超対称性を導入した理論を考える．この系の基底状態では超対称性が破れず，基底状態を特徴付けられるパラメターも得られる．特に系の大域的対称性のどれが自発的に破れ，どれが保存するかが決まる．その一方，全く別の理論として，$SU(N_f - N_c)$（双対）ゲージ場で N_f 種類の別の（双対）クォークなどがある理論を考え，その基底状態を求める．この2つの理論は全く異なる基本理論だが，基底状態の持つパラメターや大域的対称性の性質は同一であることが分かる．したがって，この2つの理論は低エネルギーで同一の結果を与える異なる記述であり，**双対**であると言う．

この考えを突き詰めていったとき，「ゲージ対称性とは，考えている変数での自然界の記述が余分な自由度を含んでいることを表しているだけである」という思想にまで達する．これは一つの極端な思想のように見えるが，実際，真実の一面を衝いており，上のように超対称ゲージ理論の非摂動効果の解析で大きな成果をあげている．このように場の量子論の非摂動効果を深く調べていくと，「余分な記述としてのゲージ場」という古典電磁気学でのゲージ場の出発点と通じる様相が垣間見えるのは，大変興味深い．

参考文献

1) 坂井典佑：『素粒子物理学』，培風館 (1993).
2) C.N. Yang and R.L. Mills, *Phys. Rev.* **96** (1954) 191.

（さかい・のりすけ，東京女子大学現代教養学部）

ゲージ場をめぐって

固体の中で

永長　直人

1. ゲージ場は怖くない

「**ゲージ場**」というと何やら難しげな響きがあって，それは素粒子理論の話だと思われる読者がおられるかもしれない．しかし，物性物理学の主役の一つである，**電磁場**はまさに代表的なゲージ場であり，電磁気学は「ゲージ場理論」そのものと言っても過言ではない．だから物理をやっている人なら，実は学部の時代からゲージ場に慣れ親しんでいるのである．アインシュタイン・インフェルトの『物理学はいかに創られたか』という本[1)]を読むと，ニュートンの法則による2つの物質間の力が両者を結ぶベクトルの方向に沿っているのに対して，エールステッドの実験——電流が磁石に働く力が，導線と磁極を結ぶ方向とは異なる方向に向くことの発見——が，「力学的自然観の凋落」の引き金になったことが述べられている．例えば，導線に電流を流すとその周りにある磁極に，電流とは垂直方向に力が働くのであるが，これはニュートンの法則からは決して出てこない力である．方向だけではなく，それは電流の大きさに比例，つまり導線を流れる電荷の速度に依存しているからである．このような，新しいタイプの力を記述するために，「**場**」のアイデアが導入された．この「場」は，最初電荷や磁極，電流間の相互作用を記述するための便法であった．つまり，物質間に直接力が働くのではなく，電荷や電流が「場」に作用し，もう一つの粒子が「場」を感じる，という形に相互作用が書けるのである．しかし，「場」は便法であるに留まらず，ファラデーの電磁誘導の法則の定式化を経て物理的実体の地位を確立していった．そして電荷や磁極，電流などの「物質」が存在しなくとも「電磁場」という物理的実体が考えられるようになり，これが従う方程式を示したのがMaxwellであった．**Maxwell 方程式**では，ある空間点での場の時間発展は，その近傍のしかも時間的にもすぐ前の時間における挙動で完全に決定される．この性質は，瞬時に働くニュートンの万有引力と対照的であるが，同時に万有引力と同様のクーロンの法則をも含んでいることは重要である（後述）．ここでゲージ場が，遠隔相互作用を場と粒子との近接相互作用によって書くための手段であるという特性がすでに電磁場において如実に現れているのである．しかし，さらに重要なのは，物質が存在しなくとも「電磁場」の波動が真空中を伝播できることをMaxwell方程式は示すことである．この**電磁波**は真空中を光速で伝播する横波であり，光もその一種であることが分かる．光が，粒子であるか，波動であるかという論争は物理学の歴史を考える上でも大変興味深い問題である．その際に，光の波動説の困難として「光が何を媒質として伝播する波であるか」，という「エーテル問題」は波動を力学的描像で捉えようとすることから来る困難であった．この「エーテル」は，真空中の電磁場というMaxwell方程式の思想によって克服されたのであるが，それは同時に相対論と

とも整合性を示していた．地球とエーテルの相対運動は，如何なる実験によっても検出されなかったが，Maxwell 方程式は**相対論的共変性**を満たし，相対論という革命をも生き残ったのである．相対論では，電場と磁場はローレンツ変換により互いに移り変わるもので，見る座標系に依存するものである．この変換性によって，動く荷電粒子による電場の時間変化を考えると，まさに「場」が，生き物のように実体を持つことを実感できる．

さて，話を本稿の主題である物性物理に向けよう．「物性」という言葉を考え直してみると，「外場」に対する「系」の応答であることがわかる．線形応答を記述する**久保理論**が特別な重要性を持つ所以である．このとき，外場として問題になるのは約 9 割くらいは電磁場と言っても過言ではない[2]．電気伝導，磁性，誘電性，光学応答，ひいては X 線散乱に至るまで，すべて異なった周波数の電磁場に対する物質の応答を見ていると言える．一方の，「系」はほとんどの場合が電子である．従って，物性理論は固体中における**量子電磁気学**（**QED**）を様々な物質を対象に研究していることになる．だから，ゲージ場はそもそも物性理論の根幹に存在しているのである．**超伝導**はその中でも，ユニークな位地を占めている．「ゲージ対称性の破れ」という Landau や BCS のアイデアは南部陽一郎によって素粒子理論へと応用されたことは衆知の事実である．マイスナー効果とは，電磁場が質量を持つこととして理解できる．一方，「物質中における電磁気学」という考えは超伝導に限らず，あらゆる物質を貫く原理である．最近の**マルチフェロイックス**の研究は，その典型例で物質中の電気分極と磁化の強い結合が模索されている[3,4]．

以上は，「電磁場ありき」という前提での話であった．ところが，「なぜ電磁場，ゲージ場が存在するのか」というより基本的な問いに対する重要なヒントを与えるような模型が物性物理学の中から出てきた．この問題は，物性理論特有の考え方「**創発**（**emergence**）」と密接に関係している．つまり，系を構成する要素の性質からは想像もつかないような機能・物性が現れることが凝縮系の最も重要な概念としてクローズアップされてきた．ゲージ場に対して具体的に言えば，「出発点ではゲージ場を含まない模型なのに，その低エネルギーの有効理論を作ると，ゲージ場が現れる」ということが最近示されたのである[5]．そこでは，「ゲージ場は，拘束条件を持つ系において普遍的に現れ」，その制限された「状態空間」の幾何学的情報を担っているところがわかる．

本稿では，以上のような内容を煩雑な式は避けて，その物理的描像を主眼に置いてなるべくわかりやすく読者にお伝えしたい．まず次の 2 節では，物質の電磁場応答を復習し，そのゲージ構造を見る．3 節では，電子系自らの中に現れるゲージ場の構造について述べる．4 節では最近の大きな話題であるトポロジカル秩序とゲージ場との関連について言及し，将来に残された問題と展望について述べる．

2. 物質の電磁応答

電磁場と結合する電子のラグランジアンは第二量子化法で，

$$
\begin{aligned}
L = \int dr\ \psi_\alpha^\dagger \Bigg[& i\hbar\partial_t - eA_0 \\
& - \frac{1}{2m}\left(\nabla + \frac{ie}{\hbar c}\boldsymbol{A}\right)^2 - \mu \Bigg] \psi_\alpha \\
- \int dr\ & \frac{1}{16\pi} F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}
\end{aligned} \tag{1}
$$

で与えられる．ここで，$A_\mu = (A_0, \boldsymbol{A})$ は 4 元電磁場ベクトルポテンシャルで，$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ は電場と磁場を成分に持つ電磁場である．このラグランジアンは，**局所的ゲージ変換**

$$
\begin{aligned}
A_\mu &\to A_\mu + \frac{\hbar}{e}\partial_\mu \eta, \\
\psi_\alpha &\to \psi_\sigma e^{-i\eta}, \\
\psi_\alpha^\dagger &\to \psi_\alpha^\dagger e^{i\eta}
\end{aligned} \tag{2}
$$

に対して不変であることがわかる．「局所的」というのは η が時間と空間の任意の関数であることを意味する．このゲージ変換の自由度は，物理量には顔を出さない．つまり，表現の仕方が，幾通りもあって「重複した」自由度が理論の中に含ま

れていることを意味している．この表現方法を選ぶために，「ゲージを固定する」ことが行われる．つまり，ベクトルポテンシャルにさらに付加条件（**ゲージ固定条件**と言う）をつけてゲージ自由度を消去しようというわけである．その選び方は，任意であるが，よく採用されるのが横ゲージと呼ばれる $\nabla\cdot\boldsymbol{A}=0$ を満たすゲージである．このゲージでは，スカラーポテンシャルとベクトルポテンシャルが結合せずに別々に積分できる．この事情は，両者のクロスタームが

$$\int dr\ \partial_0\boldsymbol{A}\cdot\nabla A_0=-\int dr\ A_0\partial_0\nabla\cdot\boldsymbol{A}=0 \quad (3)$$

と消えることから明らかであり，このゲージの下では，A_0 を積分するときに時間遅延効果が厳密に存在しないで，直ちに電子間のクーロン相互作用を導き，

$$L=\int dr\left[d^3r\ \psi^\dagger_\alpha(r,\tau)\left(\partial_\tau-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\nabla+\frac{ie}{\hbar c}\boldsymbol{A}\right)^2-\mu+V(r)-eA_0\right)\psi_\alpha(r,\tau)+\frac{1}{8\pi}[(\nabla\times\boldsymbol{A})^2-(\partial_0\boldsymbol{A})^2]\right] \quad (4)$$

という通常私たちがよく目にするラグランジアンが得られる．もちろん現実には電磁場を介した相互作用をすべて自己無撞着に考察する必要があり，ゲージ不変な量だけが物理量としての資格を持つのである．ただし，理論の途中にゲージに依存する量が現れてそれが物理的直観を与えることもしばしば起こる．相互作用する電子系の**フェルミ流体論**では，準粒子という概念が中心的な役割を果たすが，そのグリーン関数はやはりゲージに依存する量であり，通常は横ゲージで議論される．これらのことから，横ゲージを**物理的なゲージ**と呼ぶこともある．

ゲージ変換は連続群であるから，**保存則**と関係している．(2) 式で，時間・空間に依らない α に対して，ラグランジアンは不変に保たれるが，それに対応して**ネーターの定理**より，保存則

$$\partial_\mu j^\mu=0 \quad (5)$$

が得られる．ここで，4 元電流密度

$$j^\mu=(\rho,\boldsymbol{j})=c\frac{\delta L}{\delta A_\mu} \quad (6)$$

は電子系の電荷密度と電流密度を合わせたもので，上式は連続方程式

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\nabla\cdot\boldsymbol{j}=0 \quad (7)$$

に他ならない．さて，(1) 式に戻って，電子の場を積分してしまいその結果得られた電磁場に対する有効作用を考えよう．一般には，それはベクトルポテンシャル A_μ の複雑な（非線形の）汎関数となることが予想されるが，小さい A_μ に対しては，低次の項だけでよかろうと予想される．通常は A_μ に関して 2 次の項だけで十分であることが多い．このとき，有効作用は

$$S_{\text{eff}}(\{A_\mu\})=\frac{1}{2}\sum_q K_{\mu\nu}(q)A_\mu(-q)A_\nu(q) \quad (8)$$

と書ける．ここで，

$$j_\mu(q)=\frac{\delta S_{\text{eff}}}{\delta A_\mu(-q)}=K_{\mu\nu}(q)A_\nu(q) \quad (9)$$

となるので，$K_{\mu\nu}(q)$ $(q=(\omega,\boldsymbol{q}))$ を応答関数とする線形応答理論に対応していることがわかる．ここで，電荷保存則 (6) 式に対応して，

$$q^\mu K_{\mu\nu}(q)=K_{\mu\nu}(q)q^\nu=0 \quad (10)$$

が成立する．さて，3 次元の等方的な系では横ゲージで，(8) 式は（$a,b=x,y,z$ として）

$$\begin{aligned}&K_{00}(q)A_0(q)A_0(-q)\\&+K_\perp(q)\left(\delta_{ab}-\frac{q_aq_b}{|\boldsymbol{q}|^2}\right)A_a(q)A_b(-q)\\&+K_{0a}(q)A_0(q)A_a(-q)\end{aligned} \quad (11)$$

となる．ここで，$K_{00}(q)$ が電荷（縦）の応答を，$K_\perp(q)$ が横の応答を表している．

物性物理学に現れるほとんどすべての現象・効果は (11) の表式の中に含まれている．その中でも最も顕著なものが超伝導であろう．**BCS 理論**によると，電荷の保存を破るような秩序パラメーター $\Delta=\langle\psi_\uparrow\psi_\downarrow\rangle$ が有限となり，それに伴って

$$K_\perp(\omega=0,\boldsymbol{q}\to\boldsymbol{0})=\rho_s \quad (12)$$

となることが超伝導の発現に対応する．ρ_s は超流動密度と呼ばれる量であり，マイスナー効果をもたらす．電磁場が質量を持って，試料の中に侵入できなくなるわけで，しばしば**ゲージ対称性の破れ**と呼ばれる現象である．しかし，この言葉は誤

解を招きやすく，実際のゲージ対称性は破れていないのである．ゲージ不変でない秩序パラメーターの存在を否定した**Elitzerの定理**とBCS理論は矛盾しているわけではなく，BCS理論が横ゲージを前提としていることに注意する必要があるだけである[6]．ゲージ不変性を意識した計算を行うと，縦の応答についてプラズマモードが出てきて，横の応用はBCS理論と一致することが示される．

A_0 と A_a のクロスターム $K_{0a}(q)$ の項は時間反対称性 $\mathcal{T}$ のある系では存在しない．$\mathcal{T}$ に対して，A_0 と A_a の偶奇性が異なるためである．逆に言えば，時間反転対称性の破れに伴う現象，ホール効果，ファラデー効果，電気磁気（ME）効果，などはこの $K_{0a}(q)$ によって記述される．例えば，ホール効果は，

$$S_{\mathrm{Hall}} = \sigma_{xy} A_0 (\partial_x A_y - \partial_y A_x) \tag{13}$$

によって記述されるし，ME効果は

$$S_{\mathrm{ME}} = \alpha \varepsilon_{abc} q_a q_b A_0 A_c \tag{14}$$

によって記述されるといった具合である．

3. 電子系におけるゲージ場

今までは，外場としての電磁場をゲージ場の代表例として議論してきた．ところが，近年ゲージ場が，電子系自身の取扱いに大きな役割を果たすことが知られるようになってきた．その代表的な例が，**ベリー位相**とそのゲージ構造である[7]．ベリー位相は，量子系の断熱的変化に対して定式化された．今，ハミルトニアン $H(\boldsymbol{X})$ がパラメーター $\boldsymbol{X}$ に依存しており，

$$H(\boldsymbol{X})|n(\boldsymbol{X})\rangle = E_n(\boldsymbol{X})|n(\boldsymbol{X})\rangle \tag{15}$$

と固有値，固有状態を持つとしよう．エネルギー縮退はないとしておく．このとき，パラメーター $\boldsymbol{X}(t)$ を異なった固有状態間の遷移が起こらないようにゆっくりと時間 t の関数として $\boldsymbol{X}_0$ から $\boldsymbol{X}$ まで変化させてゆくと，系は（今最初に選んだ n に対応する）$|n(\boldsymbol{X}(t))\rangle$ に留まるであろう．しかし，問題は波動関数の位相である．ベリーは

$$\gamma = \int_{\boldsymbol{X}_0}^{\boldsymbol{X}} d\boldsymbol{X} \cdot \boldsymbol{A}_n(X) \tag{16}$$

という位相が，系のダイナミカルな時間発展の他に波動関数に加わることを見出した．ここで

$$\boldsymbol{A}_n(\boldsymbol{X}) = i \left\langle n(\boldsymbol{X}) \left| \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{X}} \right| n(\boldsymbol{X}) \right\rangle \tag{17}$$

で定義されたパラメーター空間でのゲージ場（ベクトルポテンシャル）である．このような，位相が生じる理由は，図1に模式的に示してある．この図で球面は，$|n(\boldsymbol{X})\rangle$ によって張られた部分ヒルベルト空間で，矢印（ベクトル）は波動関数であると考えていただきたい．制限されたヒルベルト空間は，一般に「曲った」空間であり，接続と曲率によって特徴づけられる．この曲った空間の中で，ベクトルの「平行移動」を行うと，その向きが自然に変化してゆく．特に，ループを描いて元の位置に帰って来たときには，それが取り囲む曲面にわたっての曲率の積分が，ベクトルの向きの変化を与える．（図では球面の1/8なので立体角 $\pi/2$ に対応した角度が最初のベクトルと帰って来たベクトルの間に生じている．）これを(16)式に即して表現すると

$$\gamma = \oint_C d\boldsymbol{X} \cdot \boldsymbol{A}_n(\boldsymbol{X}) = \iint d\boldsymbol{S} \cdot \nabla_X \times \boldsymbol{A}_n \tag{18}$$

と，Stokesの定理によってベリー曲率 $\nabla_X \times \boldsymbol{A}_n$ の面積分が現れることに対応している．

物性物理で，このようなベリー位相が現れるのはどのような場面であろうか．まず，代表的なのは固体中のブロッホ電子状態である．バンドギャップによって他のバンドから隔たれた一つのバンドの中でだけ電子波動関数が運動するという場合には，このベリー位相が現れる．この場合，先に述べたパラメーター $\boldsymbol{X}$ は，結晶波数 $\boldsymbol{k}$ に対応する．このとき，運動量空間のベリー位相ゲージ場は，**異常速度**という通常の群速度以外の寄与をもたらす．この異常速度が，強磁性体金属における**異常ホール効果**[8]，半導体における**スピンホール効果**[9]，ひいては強誘電体における**分極電流**をもたらすのである．

じつは，**スピン軌道相互作用**もベリー位相と類似の考え方で，理解できる．Dirac方程式は，正のエネルギー状態と負のエネルギー状態を解として持

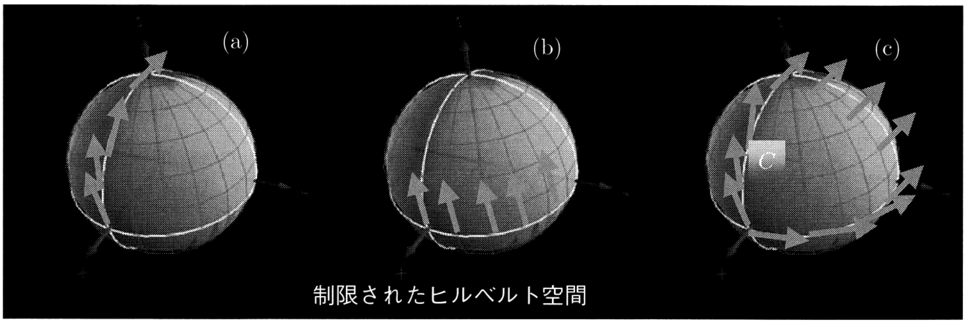


図 1　球面上のベクトルの平行移動．赤道上の点から出発したベクトルを常に球面の接平面上にあるように平行移動してゆく．(a) 経線に沿った平行移動と，(b) 赤道に沿った平行移動を組み合わせて (c) に示すように閉曲線に沿った平行移動を行うと，元のベクトルとは異なる方向を向くことになる．

つが，両者は $2mc^2$ のエネルギーギャップによって隔てられている．通常物性物理学では，電子・陽電子対生成のような高エネルギーの過程を考えないので，正のエネルギー状態だけを考慮に入れるが，ここでやはり「ヒルベルト空間の制限」が起きる．この制限に対応して，スピン空間での $SU(2)$ のゲージ接続が現れるが，それこそがスピン軌道相互作用に他ならない．つまり，(1) 式を拡張して，

$$\psi_\alpha^\dagger \boldsymbol{A}_a(\sigma_a)_{\alpha\beta}\psi_\beta \tag{19}$$

というゲージ場 $\boldsymbol{A}_a$ $(a = x, y, z)$ との結合が相対論的補正として現れるわけである[10]．

上述の例では，すべてゲージ場は「静的」なものでそれ自身のダイナミクスを持っていなかった．ところが，強相関電子系では，ダイナミクスを持つゲージ場が現れることがしばしば起こる．その原因は再び「ヒルベルト空間の制限」である．例えば，ハバード模型を考える．

$$H = -\sum_{ij,\alpha} c_{i\alpha}^\dagger c_{j\alpha} + U\sum_i n_{i\uparrow}n_{i\downarrow}. \tag{20}$$

U が大きい極限では，同一軌道に異なるスピンの2電子が入ることが禁止される．これが「制限」もしくは「拘束条件」である．特にハーフフィリングの場合，つまり電子が1軌道あたり1つの場合には，モット絶縁体となる．つまり，各軌道に1つの電子が入っているという拘束条件をゲージ場によって表現しようということである．この条件は，いろいろな形で表現される．最も簡単なのは，電子数が「奇数である」ということを表現する Z_2 ゲージ場による拘束条件の記述である．その他，$U(1)$ ゲージ場，$SU(2)$ ゲージ場などによる表現が可能である[5,6]．これらのゲージ場は，「静的」なものとは正反対で時間・空間の関数として激しく変動する．なぜなら，拘束条件を表すゲージ場には，そのダイナミックスを表す $F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ のような項がラグランジアンにないからである．この場合には，ゲージ場は通常**閉じ込め**を起こしてしまい，質量を持つようになってゲージ不変でない粒子とともに物理的なスペクトルに現れないことになってしまう．この問題に対して提出された答えが，次に述べる**量子秩序**という考え方である．

4. 創発現象としてのゲージ場

Xiao-Gang Wen は，分数量子ホール効果と高温超伝導体の研究から盛んになった量子スピン液体の両者を貫く概念として「量子秩序」を提案している[5]．通常の「古典的」秩序は，Landau が看破したように，対称性の破れを中心的概念としそれを特徴づける秩序パラメーターが存在する．並進対称性や回転対称性がその対称性の例である．ところが，このような通常の対称性によって記述できない「秩序」が存在するのである．詳しいことは，本稿の範囲を超えるが，量子力学特有の「位相」の自由度とその「トポロジー的性質」によって特徴づけられた状態と，直観的には捉えられる．例えば，ボゾンだけの模型において，この「量子秩

序」が存在すると，「ゲージ場」と「フェルミオン」が同時に出現する模型を構築することができるのである．このように，ゲージ場が，ボゾン場から生成されるというのは光の伝播を媒介する「エーテル」理論のモダンな復活と言えるかもしれない．光の粒子説が，量子力学という新しい舞台で復活したように．

もう一つの方向として，物性物理学に浸透してきたのは**拡がった自由度**という考え方である．界面や，種々の不均一構造，などの問題は従来の 0 次元の粒子から，高い次元の「粒子像」への飛躍を要請しているのかもしれない．ゲージ場とカイラル場との関係，さらに弦理論への発展など[11]は物性物理学に将来応用される時代が予感される．ニーチェに倣って言えば，「ゲージ場とは越えられなければならない何者か」なのかもしれない．

参考文献

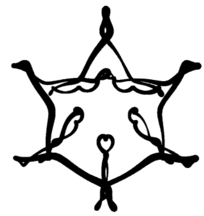
1) アインシュタイン・インフェルト『物理学はいかに創られたか』（上・下）石原純訳，岩波新書 1973 年．
2) L.D. Landau, E.M. Lifshitz, and L.P. Pitaevskii, *Electrodynamics of Continuous Media* (Landau and Lifshitz Course of Theoretical Physics Volume 8) (Reed Educational and Professional Publishing Ltd 1984).
3) T. Kimura, T. Goto, H. Shintani, K. Ishizaka, T. Arima, and Y. Tokura, *Nature* (*London*) **426** (2003) 55.
4) H. Katsura, N. Nagaosa, and A.V. Balatsky, *Phys. Rev. Lett.* **95**, 057205 (2005).
5) Xiao-Gang Wen, Quantum Field Theory of Many-Body Systems (Oxford University Press, 2004).
6) 永長直人『物性論における場の量子論』（岩波書店，1995 年）；永長直人『電子相関における場の量子論』（岩波書店，1998 年）．
7) M.V. Berry: *Proc. Roy. Soc. London* A **392** (1984) 45.
8) N. Nagaoasa, *J. Phys. Soc. Jpn.* **75**, 042001 (2006).
9) S. Murakami, N. Nagaosa, and S.-C. Zhang: *Science* **301** (2003) 1348.
10) J. Froelich and U.M. Studer, *Rev. Mod. Phys.* **65**, 733 (1993).
11) A.M. Polyakov, Gauge Fields and Strings (Harwood Academic Publishers, 1987).

（ながおさ・なおと，東京大学大学院工学系研究科）



“繰り込み” という立役者

無限大との付き合い方



青木 慎也

1. はじめに

素粒子物理学で中心的な役割を果たす「言語」は，場の量子論である．場の量子論は，多自由度の量子力学とも考えられるが，その自由度の数は無限，それも非可算（つまり数えられない）無限であり，通常の多自由度の量子力学とは大きく異なる．その結果，例えば，理論の真空の一意性が保証されないなど，一見奇妙な性質を持つ．その中で最も病的で困ったものとして，物理量の発散がある．これは，物理量に対する量子補正，例えば電子の質量に対する量子補正，などを計算すると，補正が有限にならず無限大となってしまう現象である．このような発散が発見された当初は，発散するのは場の量子論が理論として不完全なために起こる現象だと考えられていた．発散が出ないように場の量子論を「改良」する試みがいろいろ提案されたが，いずれもうまくいかなかった．理論を改良することで発散を取り除くのではなく，量子補正の計算方法および解釈を変えることで物理量に対する発散を取り除いたのが，日本の朝永振一郎らであり，発散を取り除く操作は**繰り込み**（英語では renormalization）と名付けられた．

繰り込みの操作に関しては後でもう少し具体的に説明するが，ここではその考え方を簡単に説明しよう．朝永らは，実際に観測される電子の質量には量子補正が含まれており，その値は有限のはずであると考えた．量子補正のない電子の質量を裸の質量と呼ぶことにしよう．すると，量子補正は発散するが，裸の質量と量子補正を足したもの，つまり観測される質量，が有限になるためには，量子補正の発散を裸の質量で打ち消す必要がある．このためには，量子補正のない裸の質量自身も無限大になっていて，量子補正の無限大 − 裸の質量の無限大 = 有限の観測される電子の質量，というのが朝永らの**繰り込み理論**の中心的な考え方である．私が学生のときにこの繰り込みの考えをはじめに聞いたときは，何かだまされたような気がしたのをよく覚えている．実は朝永らの繰り込み理論は，量子補正の計算方法である摂動展開と密接に関係しており，摂動展開の範囲では「正当な」操作なのだが，上のような説明を聞くと不自然な感じを持ってしまうことは否めない．最近は，摂動展開によらずに場の理論を解析することが可能になってきて，そこでは，繰り込みの考えはもっと自然なものになってきている．以下では，摂動展開による伝統的な繰り込み理論を中心に繰り込みの考え方を紹介していく．そして最後に，摂動論によらない現代的な繰り込み理論を簡単に紹介する．

2. 摂動展開による量子補正

繰り込みの操作を理解するには，摂動展開による場の量子論の取扱いが必要になるので，初めにそれを説明しよう．簡単のために，スカラー場の理論を使うことにする．4 点相互作用をするスカ

ラー場の作用積分 S は

$$S(m_0^2, \lambda_0) = \int d^4x \Big[\frac{1}{2}(\partial^\mu \varphi(\boldsymbol{x})\partial_\mu \varphi(\boldsymbol{x}) - \frac{m_0^2}{2}\varphi(\boldsymbol{x})^2 - \frac{\lambda_0}{4!}\varphi(\boldsymbol{x})^4\Big] \quad (1)$$

で与えられる．ここで，$\varphi(\boldsymbol{x})$ は 4 次元座標 $\boldsymbol{x} = (x_0, x_1, x_2, x_3)$ 上に定義されたスカラー場であり，m_0 はその裸の質量，λ_0 は 4 点相互作用の裸の結合定数である．ミンコフスキー空間なので内積は $x^\mu x_\mu = x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2$ と定義される．ここで，繰り返して現れた添字 μ に関しては 0 から 3 までの和を取る，というアインシュタインの既約を用いている．また，$\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu}$ であり，アインシュタインの既約より，$\partial^\mu \varphi(\boldsymbol{x})\partial_\mu \varphi(\boldsymbol{x}) = (\partial_0 \varphi(\boldsymbol{x}))^2 - \sum_{k=1}^3 (\partial_k \varphi(\boldsymbol{x}))^2$ となる．この作用に変分原理を適用すると，スカラー場 φ に対する運動方程式が

$$\left[\partial^\mu \partial_\mu + m_0^2\right] \varphi(\boldsymbol{x}) = -\frac{\lambda_0}{3!}\varphi(\boldsymbol{x})^3$$

と得られる．この運動方程式は，相互作用がない自由スカラー場の場合には，よく知られた**クライン・ゴルドン方程式**になる．相互作用のない場合の場の量子論は厳密に解くことができ，その場合の自由スカラー場の伝搬関数は

$$D_0(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) \equiv \langle 0|T\varphi(\boldsymbol{x})\varphi(\boldsymbol{y})|0\rangle = \int \frac{d^4p}{i(2\pi)^4}\frac{ie^{\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})}}{m_0^2 - \boldsymbol{p}^2} \quad (2)$$

で与えられる．ここで，$|0\rangle$ はこの理論の真空であり，時間順序積（T 積）は，$x_0 > y_0$ では，$T\varphi(\boldsymbol{x})\varphi(\boldsymbol{y}) = \varphi(\boldsymbol{x})\varphi(\boldsymbol{y})$，逆に $y_0 > x_0$ では，$T\varphi(\boldsymbol{x})\varphi(\boldsymbol{y}) = \varphi(\boldsymbol{y})\varphi(\boldsymbol{x})$，と定義される．この伝搬関数はクライン・ゴルドン方程式のグリーン関数であり，$[\partial^\mu\partial_\mu + m_0^2]D_0(\boldsymbol{x}) = -i\delta^4(\boldsymbol{x})$ を満たす．場の量子論では，場の伝搬を図で表すことがあり，**ファイマン図**と呼ばれている．例えば，自由スカラー場の伝搬関数のファイマン図は図 1 (a) のように書かれる．

相互作用がある場合，つまり λ_0 がゼロでない場合を考えよう．スカラー場の伝搬関数に対する λ_0 の 1 次の量子補正のファイマン図は，図 1 (b) で与えられる．相互作用 $\lambda_0\varphi(\boldsymbol{x})^4$ のために，空間を伝搬していたスカラー場が仮想的なスカラー場を放出，吸収する寄与が量子補正として現れたのが見て取れる．図 1 (c) は，λ_0 の 2 次での量子補正のファイマン図の例である．このように相互作用の結合定数 λ_0 の次数で展開するのが摂動展開である．

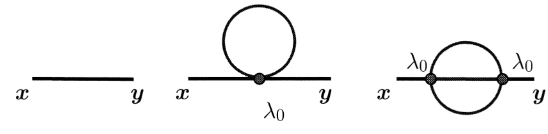


図 1 (a) 自由スカラー場の伝搬関数 $D_0(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})$ のファイマン図．(b) 伝搬関数 $D(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})$ に対する λ_0 の 1 次の量子補正を与えるファイマン図．(c) λ_0 の 2 次の量子補正を与えるファイマン図の例．

さて，質量に対する量子補正を摂動展開で計算してみよう．この場合は，運動量空間で考えたほうが見通しが良い．量子補正をすべて含んだ運動量空間でのスカラー場の伝搬関数 $D(\boldsymbol{p}^2)$ は，以下のように書ける．

$$\begin{aligned} D(\boldsymbol{p}^2) &= D_0(\boldsymbol{p}^2) + D_0(\boldsymbol{p}^2)\Sigma(\boldsymbol{p}^2)D_0(\boldsymbol{p}^2) \\ &\quad + D_0(\boldsymbol{p}^2)[\Sigma(\boldsymbol{p}^2)D_0(\boldsymbol{p})^2]^2 + \cdots \\ &= \frac{1}{i}\frac{1}{\{iD_0(\boldsymbol{p}^2)\}^{-1} + i\Sigma(\boldsymbol{p}^2)}. \end{aligned} \quad (3)$$

ここで，$D_0(\boldsymbol{p}^2)$ は自由スカラー場の伝搬関数であり，$iD_0(\boldsymbol{p}^2) = 1/(m_0^2 - \boldsymbol{p}^2)$ で与えられる．また，$\Sigma(\boldsymbol{p}^2)$ は 1 粒子既約な図からの量子補正の全体である．1 粒子既約とは，内線（外と繋がっていない線）を一つ切断したときに 2 つに分かれないファイマン図のことで，式 (3) の最後の式は，無限等比級数の和を取ったものである．式 (3) に対応するファイマン図を図 2 に与えておく．さらに，$i\Sigma(\boldsymbol{p}^2) = A + B\boldsymbol{p}^2 + \cdots$ と $\boldsymbol{p}^2$ で展開し，式 (3) に代入し，$\boldsymbol{p}^4$ 以上を無視すると，

$$D(\boldsymbol{p}^2) = \frac{Z}{i(m^2 - \boldsymbol{p}^2)}$$

となる．ここで，$Z = 1/(1-B)$, $m^2 = Z(m_0^2 + A)$ であり，m^2 が量子補正を含んだスカラー場の質量となる．

以上の準備の元に，スカラー場の質量に対する量子補正を λ_0 の 1 次で計算しよう．$\Sigma(\boldsymbol{p}^2)$ に寄与するファイマン図は図 1 (b) から外と繋がっている線（外線）の 2 つの D_0 を取り除いたもので

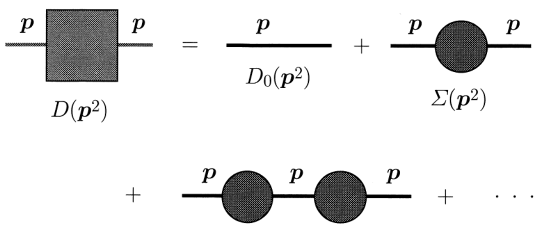


図 2　量子補正を含んだ運動量空間でのスカラー場の伝搬関数の摂動展開のファイマン図．

あるから，

$$i\Sigma(\boldsymbol{p}^2) = \frac{\lambda_0}{2}\int \frac{d^4q}{(2\pi)^4}\frac{i}{\boldsymbol{q}^2 - m_0^2} = A \quad (4)$$

となる．右辺は運動量 $\boldsymbol{p}$ には依らないので，A そのものを与える．したがって，$B=0$ である．実際に積分を計算する前に，物理的な意味を少し考えよう．4 次元運動量 $\boldsymbol{p}$ で伝搬するスカラー場は，相互作用 λ_0 のために，途中で運動量 $\boldsymbol{q}$ を持つ仮想的な場を瞬間的に放出・吸収する．この過程を表したのが式 (4) であり，運動量保存を考えても $\boldsymbol{q}$ の値は勝手に取れるのですべての値に関して積分している．

3. 発散と正則化

式 (4) より，量子補正を含んだ質量は $m^2 = m_0^2 + A$ となることがわかる．式 (4) の積分を実行するために，ミンコフスキー空間の運動量 $\boldsymbol{q}$ を $q_0 = ik_4$ とユークリッド空間の運動量 $\boldsymbol{k}$ に変数変換する．変換後の積分は 4 次元球座標を用いて

$$A = \frac{\lambda_0}{2}\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{1}{\boldsymbol{k}^2 + m_0^2} = \frac{\lambda_0}{16\pi^2}\int_0^\infty dk \frac{k^3}{k^2+m_0^2} \quad (5)$$

となる．k が大きなところでは，被積分関数は k の 1 次で増大するので，この積分は明らかに発散することがわかる．これが量子補正の発散の一例である．この計算から明らかなように，量子補正の発散は k の大きな（つまり波長が短い）ところの寄与によるものであるので，この発散のことを**紫外発散**と呼ぶ．発散する量をそのまま扱うのは，例えば，$0 \times A$ は何か，などの不定性を伴うので，それを避けるために，**正則化**（英語では regularization）を行い，積分を有限にする．ここでは，$\boldsymbol{k}^2 \leq \Lambda^2$ のように運動量に上限を導入することで正則化を行う．$\Lambda \to \infty$ とすれば元の結果に戻る．この正則化により，

$$A = \frac{\lambda_0}{32\pi^2}\left[\Lambda^2 - m_0^2 \log\left(\frac{\Lambda^2}{m_0^2}+1\right)\right]$$

となり，A は Λ^2 のように 2 次発散していることが分かる．また，m_0^2 に比例する寄与は対数発散している．以上のことから，λ_0 の 1 次まででで量子補正を含んだ質量 m^2 は

$$m^2 = m_0^2\left[1 - \frac{\lambda_0}{32\pi^2}\log\left(\frac{\Lambda^2}{m_0^2}+1\right)\right] + \frac{\lambda_0}{32\pi^2}\Lambda^2 \quad (6)$$

となる．

正則化によって積分の値が有限になったが，$\Lambda \to \infty$ とすると再び発散が現れるので，量子補正が発散するという問題が解決したわけではない．次節ではいよいよ発散を除去するための方法である繰り込みを考える．

4. 繰り込み理論

繰り込み理論では，裸のパラメタ m_0^2 や λ_0 ではなく，繰り込まれた質量 m_R^2 や繰り込まれた結合定数 λ_R を用いて摂動展開を行う．ここで，添字 R は繰り込まれた (renormalized) 量を表すものである．パラメタだけでなく，スカラー場 φ に対しても繰り込まれた場 φ_R を使うべきだが，λ_R の 1 次では必要ないので，簡単のためにここでは考えないことにする．

まず，裸のパラメタと繰り込まれたパラメタの関係を以下のように決める．

$$m_0^2 = m_R^2 + \delta m^2, \quad \lambda_0 = \lambda_R + \delta\lambda.$$

ここで，δm^2 や $\delta\lambda$ は相殺項と呼ばれる量で，各々が，m_R，λ_R，および Λ に依存している．以下で見るように，繰り込まれたパラメタに対する量子補正が発散しないためには，相殺項自体は（一般に）発散している．裸のパラメタで書かれた作用 (1) を繰り込まれたパラメタとその相殺項を用いて書き直すと，$S(m_0^2, \lambda_0) = S_R + \delta S$ となる．ただし，$S_R = S(m_R^2, \Lambda_R)$，$\delta S = S(\delta m^2, \delta\Lambda)$ であ

る．ここまでは，単なる等式変形であるが，繰り込み理論では，摂動展開を S ではなく，S_R を用いて行うところが前と異なる．つまり，摂動展開の最低次として，S_R から求まる伝搬関数を用いて，それ以外の部分，つまり，$\lambda_R\varphi^4$ の項や δS を摂動項として摂動展開を行うのである．この場合は，相殺項も，$\delta m^2 = c\lambda_R + \cdots$，$\delta\lambda = d\lambda_R + \cdots$ と展開されていると考える．このような展開を**繰り込まれた摂動展開**と呼ぶ．

繰り込まれた摂動展開で，質量に対する量子補正を計算しよう．λ_R の 1 次で A に対する寄与は図 3 の (a), (b) で与えられる．(a) の寄与は前の結果でパラメタを m_R^2 と λ_R に置き換えればよい．(b) の寄与は δm である．したがって，

$$A = \frac{\lambda_R}{32\pi^2}\left[\Lambda^2 - m_R^2 \log\left(\frac{\Lambda^2}{m_R^2}+1\right)\right] + \delta m^2$$

となる．δm^2 を決めるためには，繰り込み条件と呼ばれる条件が必要である．ここでは，量子補正を含めた質量が繰り込まれた質量に等しい，つまり，$m_R^2 + A = m_R^2$，という繰り込み条件を置く．この条件を満たすには，$A = 0$ でなくてはならないから，相殺項が

$$\delta m^2 = -\frac{\lambda_R}{32\pi^2}\left[\Lambda^2 - m_R^2 \log\left(\frac{\Lambda^2}{m_R^2}+1\right)\right]$$

と決まる．確かに相殺項は発散しており，それにより (a) から来る発散が打ち消され，量子補正を含めた質量は有限になっている．実験で測定されるのは量子補正込みの質量なので，m_R が実験で測定される質量になる．裸の質量 $m_0^2 = m_R^2 + \delta m^2$ は確かに発散しているが実験で測定される観測量ではないので問題ない，と思うのが繰り込み理論の考え方である．質量だけでなく，結合定数も同様に計算して，「量子補正を含んだ結合定数が λ_R に等しい」という繰り込み条件を置けば，$\delta\lambda$ が決定される．

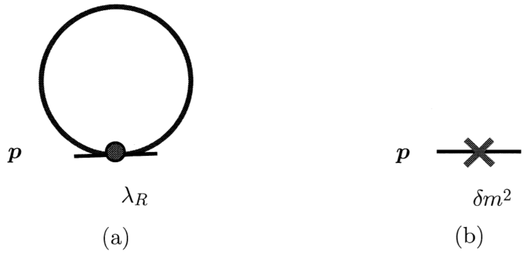


図 3　繰り込まれた摂動論の λ_R の 1 次の 1 粒子既約な寄与．(a) ループからの寄与を与えるファイマン図．(b) 相殺項の寄与を与えるファイマン図．

質量に対する量子補正自体は相殺項に打ち消されてゼロになっているので，量子効果を「予言」することはできないが，繰り込まれた摂動展開では，他の物理量に対する量子補正は m_R^2 と λ_R の関数として計算され，$\Lambda \to \infty$ の極限でも発散せずに有限になるので，その物理量を摂動展開で予言することができる．つまり，繰り込まれた摂動展開により発散の問題が回避され，場の量子論が予言能力を持つことになったのである．これが**繰り込まれた場の量子論**である．

5. 繰り込み可能性

前の例では，m_R^2 と λ_R の繰り込みを行うことですべての発散が取り除けたことが，繰り込まれた場の理論が予言能力を持つために必要であった．このように，少数のパラメタの繰り込みを行うだけで発散が取り除ける場合を，理論が**繰り込み可能**であると呼ぶ．つまり，場の量子論が意味を持つためには，繰り込み可能でなければならない．

どのようなときに繰り込み可能になるかを，スカラー場を例に考えてみよう．相互作用項が m 個の微分を含んだ n 個のスカラー場の積からできているとしよう．相互作用なしのスカラー場の伝搬関数は，大きな運動量で $\boldsymbol{p}^{-2}$ と振る舞うこと，また，内線の運動量は積分されること，などを使うと，与えられたファイマン図の見かけの発散の次数 D は

$$D = (d-2)I + mV - d(V-1)$$

で与えられる．ここで，d は時空間の次元，I はスカラー場の内線の数，V は相互作用項の数である．最後の項は，各々の相互作用項では運動量が保存するのでその分の内線の積分が発散に効かないことを考慮したものである．-1 があるのは，全体の運動量保存は積分を制限しないことに対応している．外線の数を E とすると，$nV = 2I + E$

という関係がある．これは相互作用項から出る場を結んでファイマン図を作るので，内線なら2つ，外線なら1つ，そのような場を使っていることから理解できる．この関係式を使うと

$$D = d - \frac{d-2}{2}E + V\,(d_V - d)$$

となる．ここで，$d_V = n(d-2)/2 + m$ は相互作用項の質量次元である．（d 次元のスカラー場の質量次元は $(d-2)/2$ であることに注意して欲しい．）$D \geq 0$ のときに，ファイマン図は発散すると考えられる．このことから，相互作用項を次の3つに分類できる．

(1) $d_V - d < 0$ のとき．外線の数を増やしたり相互作用項の数を増やしていくと D はどこかで必ず負になる．したがって，発散するファイマン図の個数は有限個である．このような相互作用は**超繰り込み可能**と呼ばれ，例えば，4次元の $\lambda\varphi^3$ 理論などがその例である．この場合，$d_V - d = -1$ なので，$D = 4 - E - V$ となる．発散するのは，$(E=0, V=2,4)$, $(E=1, V=1,3)$, $(E=2, V=2)$ の場合だけである．

(2) $d_V - d = 0$ のとき．このとき，外線の数が増えて行くと発散しなくなるので，発散するファイマン図のタイプ（外線の数）が有限になる．ただし，外線の数を決めても発散するファイマン図の数は無限個あり，摂動展開の任意の次数で発散が出る可能性がある．このような相互作用は**繰り込み可能**と呼ばれ，今まで考えてきた4次元の $\lambda\varphi^4$ 理論などがそうである．このとき，$D = 4 - E$ なので，発散するのは，$E = 0, 2, 4$ だけである．（この理論の摂動展開では E が奇数のファイマン図は存在しない．）繰り込み可能な理論では，相殺項は有限個である．

(3) $d_V - d > 0$ のとき．この場合は摂動展開の次数を増やすと発散するファイマン図のタイプがどんどん増えてしまう．この場合は，相殺項が無限個必要になるので，理論として意味を持たず，**繰り込み不可能な相互作用**と呼ばれる．4次元の φ^6 相互作用は繰り込み不可能な相互作用の例である．

以上の考察から，相互作用が（超）繰り込み可能であるためには，相互作用の質量次元が空間の次元数と等しいか小さければよいことが分かる．

場の理論が意味を持つためにはすべての相互作用は繰り込み可能か超繰り込み可能でなくてはならない．このことは，素粒子の理論を作る上で非常に強い制限を課すことになっている．現在の素粒子模型はすべて繰り込み可能である．しかしながら，重力理論はそのまま量子化すると繰り込み可能にはならない．このことが，量子重力の問題が難しい理由である．最近，話題となっている超弦理論は，少なくとも摂動論の範囲では重力を含んでも繰り込み可能な理論になっており，量子重力に対する一つの解答を与えている．

6. 摂動展開に依らない繰り込み

繰り込まれた摂動展開という言い方から分かるように，ここまでに紹介してきた繰り込みは摂動展開を前提に考えられたものである．ところが，もし近似なしに完全に計算できたとすると，裸のパラメタそのもので計算しようが，それを繰り込まれたパラメタと相殺項とに分けてから計算しようが，同じ答えが得られるはずである．つまり，始めから裸のパラメタのみで計算しても近似なしで計算できれば，物理量は有限になるはずである．しかしながら，スカラー場の例で見てきたように，摂動展開の有限の次数では裸のパラメタで計算する限り発散が出る．これを避けるには，摂動展開を使わない場の理論の計算方法が必要である．

摂動展開を使わない計算は可能であろうか？ 実は，多くの場合，相互作用する場の量子論は摂動展開を用いて理論が定義されているのであり，決して，摂動展開に依らずに理論が定義されていてその近似計算法として摂動展開をしているわけではない．このような摂動展開の制約を超える場の理論の定式化として精力的に研究が進められているものに，**格子上の場の理論**がある．これは，離散的な時空間（格子）を考え，格子点 $\boldsymbol{n}a=(n_0,n_1,n_2,n_3)a$ 上のみで場 $\varphi(\boldsymbol{n}a)$ を考える理論である．ここで，a は隣り合った格子点との距離であり，格子間隔と呼ばれている．格子上の場の理論では，a が長さの基本であり，それより小さい距離がないので，運動量も π/a が上限値となる．つまり，格子上の場の理論は既に正則化がなされているので，格子正則化による場の量子論と呼ぶのがより正確であるが，以下では簡単に**格子理論**と呼ぶことにする．無限体積では格子理論の場の自由度は可算無限個であるが，有限体積では格子点の数も有限個になるので，場の自由度も有限になる．このとき，格子理論は有限自由度の量子力学と等価であるので数学的に厳密に定義され，摂動展開を使わないで場の理論が定式化できる．

格子理論では，繰り込みはどのように行われているのであろうか？ 理論が既に正則化されているので発散は出ないが，実際の時空間は離散的ではないので，$a\to 0$ という**連続極限**を取る必要がある．紙面の都合で詳しい話は省略するが，物理量が有限になるような連続極限を取るためには，裸のパラメタは勝手な値に取っては駄目であり，特定の値に近づける必要がある．この操作が繰り込みに対応している．格子間隔 a という長さの次元を持つパラメタがあるので，例えば，スカラー場の裸の質量などを，$M_0^2=m_0^2a^2$ のように無次元のパラメタに書き直して理論を書くことができる．連続極限を取ることは，M_0^2 を特定の値に近づけることに相当する．これは，m_0^2 で考えると 2 次発散しているが，M_0^2 で考える限り有限なので自然な操作である．つまり，格子理論では，次元を持たないパラメタの調整が繰り込みに対応する．これが，摂動展開に依らない繰り込みの一例である．格子理論の連続極限に関しては，例えば，文献 1) の 1～3 章で詳しく議論されているので，興味のある方は参照してほしい．

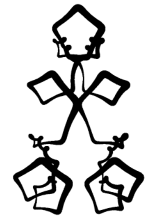
参考文献

1) 青木慎也,『格子上の場の理論』(シュプリンガー・ジャパン，2005 年).

（あおき・しんや，筑波大学大学院数理物質科学研究科）

繰り込み群と物性物理学

臨界現象，そして多様な展開へ



菊池 誠・岡部 豊

1. はじめに

もともとは場の量子論の概念だった繰り込み群は，まずは**臨界現象**を研究するための方法として，Wilson によって物性物理の世界に導入された[1]．

臨界現象というのは，強磁性体など 2 次相転移を示す系の相転移点付近で見られるさまざまな異常のことである．たとえば，一軸性の異方性を持つ強磁性体のモデルであるイジングモデルは，2 次元以上ではある温度を境として高温での常磁性状態から低温での強磁性状態に相転移する．低温の状態は平均として一方向にスピンが揃っているので，ハミルトニアンの持つ上下反転についての対称性を失っており，**対称性の自発的破れ**の典型例となっている．この相転移温度（臨界点）で，比熱や帯磁率などが異常な発散を示す．たとえば，スピンの揺らぎの相関距離 ξ は

$$\xi \sim |T - T_c|^{-\nu} \tag{1}$$

のように，温度が臨界点 T_c に近づくにつれてべき則に従って発散する．ν は臨界指数と呼ばれるものの一つである．臨界指数は平均場近似や次元解析からは出てこない非自明な値をとり，系の異常を特徴づける重要な量となっている．臨界現象の本質は，このように揺らぎの長距離相関が異常に増大するところにある．Wilson はそのような揺らぎが繰り込み群によってうまく扱えることを示した．

一方，やはり Wilson による近藤問題の計算を嚆矢として，臨界現象ではない問題も繰り込み群で扱われている．

Anderson はその著書『凝縮系物理学の基礎概念』の中で重要な概念の一つとして繰り込み群を取り上げ，臨界現象もさることながら，むしろそれ以外の問題への応用がより重要であると説いた[2]．同書で Anderson は，繰り込み群とは「よいモデルの作り方」についての一つの処方箋を与えるもの，という見方を示している．

2. 1 次元イジングモデルの実空間繰り込み群

臨界現象の文脈での繰り込み群を標語的に言うと「分配関数を不変に保ちつつ，系を空間的に順次粗視化していったときの，ハミルトニアンの変換性」のことである．

まずは練習問題として，最も簡単な 1 次元イジングモデルをとりあげよう．± 1 をとる N 個のスピン変数 S がリング状に並んでいるとして，以下のハミルトニアンを考える．

$$H = -J \sum_{i=0}^{N-1} S_i S_{i+1}. \tag{2}$$

必要に応じて N はいくらでも大きくとれるものとする．分配関数 Z は $e^{-H/k_B T}$ をすべてのスピンの状態について足したものである．多くの初等的な統計力学の教科書に書かれているように，こ

の足し算は転送行列の方法などで厳密に実行できる．しかし，ここではすべてのスピンについての状態和を一気に実行せず，先に奇数番スピンの状態についてのみ和を取ってみよう．

$$
\begin{aligned}
Z &= \sum_{S_0=\pm1}\sum_{S_1=\pm1}\cdots\sum_{S_{N-1}=\pm1}\left(\prod_{i=0}^{N-1} e^{K_0 S_i S_{i+1}}\right)\\
&= 2^{N/2}\sum_{S_0=\pm1}\sum_{S_2=\pm1}\cdots\sum_{S_{N-2}=\pm1}\\
&\quad\times\left(\prod_{i:\mathrm{even}}\cosh K_0(S_i+S_{i+2})\right). \qquad (3)
\end{aligned}
$$

ただし，$K_0 = J/k_BT$ である．相互作用定数 J と温度 T は比としてしか現れないから，K_0 をハミルトニアンの（唯一の）パラメータと呼んでおく．K_0 が大きい（小さい）極限を強結合（弱結合）と呼んでもよいし低温（高温）と呼んでもよい．

ここで $\cosh K_0(S_i+S_{i+2}) = e^{K_1 S_i S_{i+2}+L_1}$ となる K_1 と L_1 の組を求めてみよう．S は ±1 のいずれかしかとらないのだから，両辺が関数として完全に一致する必要はなく，$K_1 = L_1 = \frac{1}{2}\log\cosh 2K_0$ であればよい．さらにスピンの番号を $i \to i/2$ とつけかえれば

$$
\begin{aligned}
Z &= \left(2e^{L_1}\right)^{N/2}\sum_{S_0=\pm1}\sum_{S_1=\pm1}\cdots\sum_{S_{N/2-1}=\pm1}\\
&\quad\times\left(\prod_{i=0}^{N/2-1} e^{K_1 S_i S_{i+1}}\right) \qquad (4)
\end{aligned}
$$

と書ける．これは全体の係数を除くと，スピン数が $N/2$ のイジングモデルの分配関数にほかならない．ただし，パラメータ K_0 は K_1 に変化している．全体の係数は物理量の熱平均を取る際に分子・分母で相殺するので，自由エネルギーの値そのものを議論しないなら無視してよい．つまり，スピン数 N でパラメータが K_0 であるイジングモデルの性質は，スピン数が半分でパラメータが K_1 であるイジングモデルのものと厳密に同じである．この操作の概念図を図 1 に示す．

この操作を繰り返すと，そのたびにスピン数が半分になり，パラメータは

$$
e^{2K_{n+1}} = \cosh 2K_n \qquad (5)
$$

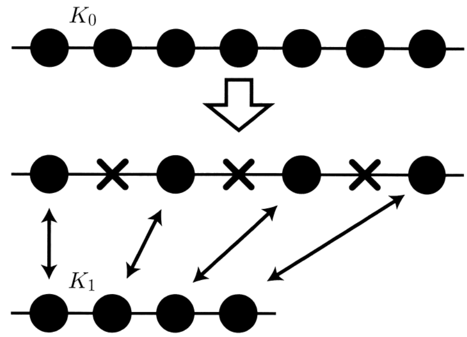


図 1 パラメータ K_0 の 1 次元イジングモデルについて，×印のスピンの状態和をとると，スピン数が半分でパラメータ K_1 の 1 次元イジングモデルに変換される．

にしたがって変化する．この一連の操作をここでは**繰り込み群変換**と呼んでおこう．スピンを消去する操作が局所的であることを反映して，パラメータの変化は全スピン数 N に依存しない点を注意しておく．パラメータがこの変換で不変に保たれるとき，モデルは繰り込み群の**固定点**にあるという．明らかに，固定点は K が 0 と ∞ の 2 つであり，それぞれ温度無限大と 0 とに対応している．

K_n が大きいところで (5) 式は $e^{2K_{n+1}} \simeq \frac{1}{2}e^{2K_n}$ と書けるので，温度 0 の固定点は不安定である．一方，K_n が小さいとき (5) 式は $K_{n+1} \simeq K_n^2$ なので，温度無限大の固定点は安定である*1)．結局，温度がちょうど 0 でない限り，あらゆる温度のイジングモデルは繰り込み群変換によって温度無限大に向かってゆく．温度無限大は無秩序状態だから，スピンを消去するにつれて無秩序状態に近づくわけである．

1 次元イジングモデルは有限温度で相転移を示さず，常磁性状態にとどまる．$1/K_0 = 0$ 以外の全温度領域が繰り込み群変換によって高温無限大に移っていくのはその事実を反映している．基底状態は自明に強磁性なので，このモデルでは臨界点が温度 0 にあるとみなすことができる．

そこで，距離が 2^n だけ離れた 2 つのスピン間の相関関数 $G(2^n, K_0) = \langle S_0 S_{2^n}\rangle$ を求めることを

*1) 変換によって固定点に近づくときその固定点は**安定固定点**，遠ざかるときは**不安定固定点**と呼ばれる．

考えよう．繰り込み群変換を n 回行うと，元の系での S_{2^n} は新しい系での S_1 になる．したがって，$G(2^n, K_0)$ を求めたければ，K_n の系での最近接スピン相関関数を計算すればよい．ところが，繰り込み群変換を多数回繰り返すことによって，変換後の系をいくらでも高温にできるから，最低次の高温展開が十分に正確であるような n をいつでも設定できる．このとき，$e^{K_n \sum S_i S_{i+1}} \simeq 1+K_n \sum S_i S_{i+1}$ とすればよく，結局

$$G(2^n, K_0) = G(1, K_n) \simeq \frac{\sum S_0 S_1 (1 + K_n \sum S_i S_{i+1})}{\sum (1 + K_n \sum S_i S_{i+1})} = K_n \tag{6}$$

と計算できる．もちろん，最低次の高温展開が正確であるためには，元の系が低温であればあるほど，繰り込み群変換を多数回繰り返す必要がある．したがって，この関係は低温であるほど長い距離の相関についてのみ成り立つ．

実際に数値計算で求めた K_n と転送行列を用いて求めた $N \to \infty$ での厳密な 2 点相関関数を n に対してプロットしたのが図 2 である．両者は n が大きくなるにつれて接近し，相関の値がおおむね 0.5 以下となる距離ではほぼ一致するのがわかる．

さて，高温での繰り込み群変換を使うと，十分大きな n に対して $\log G$ は

$$\frac{\log G(2^n, K_0)}{\log G(2^{n-1}, K_0)} = \frac{\log K_n}{\log K_{n-1}} = 2 \tag{7}$$

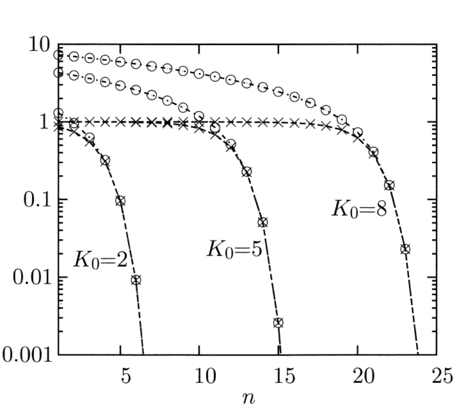


図 2　厳密な 2 点相関関数 $G(2^n, K_0)$（×）と繰り込み群変換で求めた K_n（○）．

と同次形になることがわかる．そこで，K_0 の関数 $\xi(K_0)$ を使って，$G(2^n, K_0) = \exp\left(-\frac{2^n}{\xi}\right)$ と書いてよいだろう．つまり，$\xi(K_0)$ は相関距離である．あるいは $\xi(K_0) = 2^n / \log K_n$ と書ける．右辺は十分大きい n に対して一定値に収束するが，K_0 が大きいほど収束に必要な n が大きく，したがって ξ は長くなる．

この計算は $1/K_0 = 0$ 以外の任意の温度で正しいので，この結果を低温の性質を調べるために使うことができる．たとえば，低温では $e^{2K_{n+1}} = \frac{1}{2} e^{2K_n}$ であるから，この変換で結ばれる 2 つの温度での相関距離を比較すれば，ξ は e^{2K_0} について 1 次の同次関数であることが容易に示せる．つまり，温度 0 に向かうにつれて，相関距離は e^{2K_0} に比例して指数的に発散することが導かれる．

つまり，長距離のスピン相関は安定固定点の性質として理解でき，その臨界点付近での発散の仕方は不安定固定点付近での繰り込み群によって理解できたわけである．

3. 場の理論とブロックスピン

しかし，これでは単にスピンを消去しただけで，残ったスピンは元のままだから，あまり粗視化したという感じはしないかもしれない．実際，この 1 次元イジングモデルの繰り込み群は相当特殊な例というべきである．一般のモデルを考えるにあたって，粗視化という以上，直感的にはスピンについてもなんらかの意味で均したい．

スピンを適当な領域で平均してしまえば「そのあたりの磁化」になるのだろうから，イジングモデルを粗視化したものは局所磁化 $m(\boldsymbol{r})$ を「場」とみなした場の理論のようなものになるに違いない．そこで，ハミルトニアンとして，だいたい

$$H = \int dV \left\{ (\nabla m)^2 + t m^2 + u m^4 \right\} \tag{8}$$

のようなものを考える．t と $u > 0$ がこのモデルでのパラメータである．体積積分の被積分関数は，空間微分がなければランダウ自由エネルギーの形をしており，$t > 0$ では $m = 0$ で最小値をとるの

に対して，$t<0$ では m が有限の値で最小値となり，対称性の自発的破れを記述している．分配関数は，これを指数の肩に乗せ，$m(\boldsymbol{r})$ について汎関数積分をする．形式的にはユークリッド空間での場の量子論そのものである．

このままでは計算が大変なので，場の量子論での計算と同様に，フーリエ変換で波数空間に移したものを使うことが多い．場の量子論では短波長での紫外発散が問題になるが，物性の問題では格子間隔の逆数程度の自然なカットオフ Λ がある点が違う．しかし，これはまだ出発点のモデルを決めただけである．では，ここから粗視化を繰り返すにはどうするか．

Wilson が示した処方は，まず短波長モードについて状態和を実行してしまうことだった．状態和を一気に計算せず，適当な波数から Λ までのモードについて，先に状態を足してしまうのである．すると，足されずに残ったモードのカットオフは小さくなっているので，それを元の Λ に戻すようにスケール変換を行う．「均す」か「消去する」かの違いを忘れれば，この操作の意味は 1 次元イジングモデルでやったこととだいたい同じであることがわかるだろう．この方法は大成功を収めた．特に，空間 4 次元から次元で展開する ϵ-展開によって，4 次元以下で新たな不安定固定点が出現し，それが非自明な臨界指数を与えることが示されたのは重要な成果である．

そうはいっても，このように違うモデルにしてしまうのではなく，イジングモデルが粗視化によって再びイジングモデルになってくれるならそのほうがうれしいという考え方もあるだろう．単純に消去するから粗視化に見えないので，そのかわりに，たとえば 3 つのスピンをひとまとめにして，上向きスピンが多い状態はそれを「上向き」，下向きスピンが多い状態はそれを「下向き」として 1 個のイジングスピンにしてしまうことにする．これは多数決則による**ブロックスピン変換**と呼ばれる．三角格子での概念図を図 3 に示しておく．

イジングモデルをイジングモデルに移すのはいいが，無理やりそんなことをやって，ハミルトニア

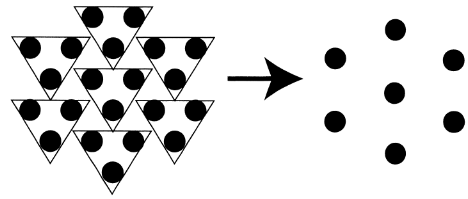


図 3　三角格子のブロックスピン変換の例．3 つのスピンの多数決でブロックスピンが up か down かを決める．

ンの形は同じになるのだろうか．たしかに 1 次元イジングモデルでは同じ形のハミルトニアンに変換されたが，一般にはそううまくいくわけではない．分配関数を不変にするという制約のため，ブロックスピン変換によって新たに次近接や次々近接の相互作用，あるいはより多体の相互作用などが生成されるのが普通である．したがって，固定点についても，そのような多数の相互作用パラメータを含む多次元空間で議論しなくてはならない．

4. 臨界現象と固定点の安定性

1 次元イジングモデルの臨界点は温度 0 にある．では，2 次元以上のイジングモデルのように，有限温度に臨界点がある場合はどうだろうか．常磁性状態での長いスケールの振舞いは温度無限大の安定固定点で記述される．強磁性状態も同様に考えてみると，遠方のスピンどうしが同じ方向に揃う傾向にあるのだから，温度 0 の状態と本質的に同じと考えていいだろう．つまり，1 次元の場合とは違い，温度 0 には強磁性を表す安定固定点があると考えられる．すると，その間には不安定固定点がなくてはならないはずである．この不安定固定点が臨界点に対応する．

臨界現象を示す系に繰り込み群変換を行ったときの典型的なパラメータ変化の概念図を図 4 に示す．繰り込み群変換によって元のモデルに含まれない相互作用も生成されるので，それらを含む多次元のパラメータ空間を考えている．パラメータ空間でのこのような動きは繰り込み群の flow と呼ばれる．$T=0$ と ∞ の固定点は安定であり，そ

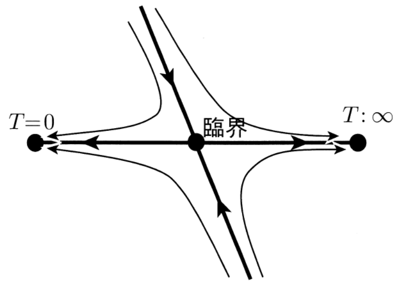


図4 2変数のパラメータ空間で描いた繰り込み群の flow の概念図．$T=0$ と ∞ に対応する安定固定点と不安定な臨界固定点を示した．さまざまなパラメータのモデルは，臨界固定点に向かう線上を除き，繰り込み群変換によっていずれかの安定固定点に収束する．

れぞれ常磁性状態と強磁性状態に対応する．その間には不安定な臨界固定点があり，そこから少しでも安定固定点方向に離れると，繰り込み群変換によって，いずれかの安定固定点に近づいてゆく．どちらの安定固定点に向かうかを分けるのが臨界固定点である．言い換えると，系がちょうど臨界固定点にある場合には，長距離の性質はどちらの安定固定点の振舞いにも帰着しない．

一方，臨界固定点に向かう線もあり，系がその線上にあれば繰り込み群変換によって臨界固定点に向かう．つまり，その系の長距離の振舞いは臨界固定点で記述される．一般のモデルの臨界点は臨界固定点ではなく，臨界固定点に向かう線上にあると考えられる．すると，同じ臨界固定点に向かう無数のモデルを考えることができるはずである．それらのモデルの臨界現象はすべて同じ臨界固定点の性質で決まる．そのようなモデル群を同じ**ユニバーサリティクラス**に属すると言う．

このように，繰り込み群変換によってパラメータが固定点に近づく方向に変化する相互作用を **irrelevant な相互作用**，パラメータが固定点から離れる方向に変化する相互作用を **relevant な相互作用**と呼ぶ．臨界現象を決めるのは臨界固定点の relevant な相互作用である．

固定点では，モデルが空間的に自己相似な構造を持つ．低温・高温の安定固定点はそれぞれスピンが一方向に揃った状態とランダムな状態なので自明な自己相似構造であるが，臨界点は非自明な自己相似構造を持つことが知られている．相関距離が発散するのはこの自己相似構造の反映である．モデルが臨界点にあっても，irrelevant な相互作用が残っていれば，短距離の性質は厳密に自己相似的ではない．

5. モンテカルロ繰り込み群

ブロックスピン変換を解析的に実行するのは難しい．それならモンテカルロ・シミュレーションを使って具体的にスピン配置を作り出し，それをブロックスピン化すればいいのではないかというアイデアが生まれる．ただし，通常のメトロポリス型モンテカルロ法では分配関数が求められないので，モンテカルロ法を使う以上，とにかくなんらかの「測定量」で議論しなくてはならない．このアイデアは Ma によって最初に提案された．その後，Swendsen がパラメータの変換性そのものを測定量で表す巧妙な手法を考案し，実空間繰り込み群の手続きに忠実に計算できるようになった．Baillie らはその方法を使い，3次元イジングモデル臨界点と臨界指数を精密に求めた．臨界指数が一定値に収束するためには，考慮する相互作用の数をかなり増やさなくてはならず，この計算では 99 種類の相互作用が取り入れられている[3]．

もっとも，現時点でモンテカルロ法による臨界現象研究の主流はモンテカルロ繰り込み群ではなく有限サイズスケーリングの方法である．臨界現象はシステムサイズ無限大で起きる現象であるから，サイズとともに物理量がどのように変化するかを見る有限サイズスケーリングの方法は理にかなっていると言えるだろう．また，臨界指数を求める計算の手続きとしても圧倒的に易しい．しかし，固定点や relevant と irrelevant 相互作用の概念など，繰り込み群を通してでなければわからない概念もあることを忘れるべきではない．

6. 密度行列繰り込み群と量子化学

Wilsonによる近藤問題の数値計算は，弱結合領域から強結合領域へのクロスオーバーを統一的に記述し，成功を収めた．最初に紹介したAndersonの本にいたっては，本質的な部分は繰り込み群ですべてやり尽くしたという立場から，その後に現れた厳密解について「物理的になんら新しいものを導いていない」と書いているほどである．

量子力学の問題である近藤問題と古典スピン系とが実空間繰り込み群でうまく扱えたので，次には量子スピン系の繰り込み群を構成したいと考えるのは自然だろう．そこで，いくつかのスピンをひとまとめにし，そのブロックの低エネルギー状態を新たなスピンとみなすというブロックスピン変換が広く試みられたが，これはなかなかうまくいかなかった．ブロックの波動関数を組み合わせても，全系に広がる低エネルギー状態の波動関数を構成できないからである*2)．

この問題は結局，ブロック・スピンにしてしまうのではなく，局所的な密度行列を繰り込みの対象とし，密度行列の重要な成分を残しつつ自由度を減らすという処方で解決された．この密度行列繰り込み群（DMRG: Density Matrix Renormalization Group）は信頼度の高い数値計算手法として，低次元量子スピン系を中心に広く使われている[5]．ただし，繰り込み群のflowのような概念はもはや希薄であると言っていいだろう．

ところで，Wilsonはノーベル賞講演の最後に今後期待される応用分野の一つとして量子化学を挙げている．具体的なアイデアはそこに示されていなかったが，しばらくして，Wilsonらによって分子の電子状態を繰り込み群で計算するという論文が発表された[5]．これは，グラスマン数の汎関数積分で電子状態を表して繰り込み群を実行し，さらに摂動展開とモンテカルロ計算を組み合わせるという道具立ての大きなもので，それにしては計算例があまりぱっとせず，残念ながら立ち消えになった．実は，この論文の筆頭著者がDMRGの創始者Whiteである．

そのWhiteは10年以上後にDMRGを量子化学に応用する手法を提案している[5]．ハートリー・フォック計算で求められた各軌道を格子モデルの「サイト」であるかのようにみなして，格子モデルと同様のDMRGを適用するというのが基本的なアイデアで，比較的少ない計算量で精度の高い結果が得られるとされる．これがWilsonの期待を実現したものなのかどうかはわからないし，どうやら今のところは量子化学者の注目をそれほど惹いていないように思えるが，今後どう発展するのか興味深い．

7. カオス系

カオスを示す力学系もまた繰り込み群が大きな成功を収めた問題の一つである．この話には分配関数も出てこないし，格子モデルでも場の理論でもなく，単なる1変数実関数の自己相似性の議論なのだが，それでもこれは繰り込み群の考え方に基づいている．

有名なロジスティック写像

$$x_{n+1} = ax_n(1-x_n) \tag{9}$$

を考えよう．これは1個のパラメータ a を含む．a が小さいとき，この力学系は1個の固定点をもつが，a の値を大きくしていくと2周期になり，さらに安定な周期点が不安定化すると同時にそれぞれの周期点から新たに2つの安定周期点が出現するというピッチフォーク型の分岐による周期倍化を繰り返して，周期無限大のカオスにいたる．

この周期倍化は自己相似的であることが知られている．たとえば図5に示すように，分岐図上で1つの周期点が2つに分岐する部分を拡大すると，もっと大きな周期の分岐と重なる．周期が小さいうちはこの自己相似性は近似的なものだが，周期倍化が進むにつれて完全に重なるようになる．これは繰り込み群のirrelevant parameterがある場合と似ている．ロジスティック写像の分岐が最初

*2) 最近，この問題について新たな発展があり，量子スピン系に対してもブロックスピン変換が復活しつつある[4]．

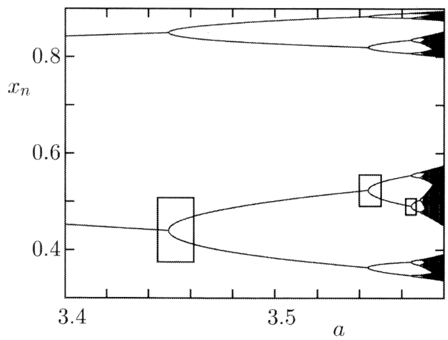


図 5 ロジスティック写像の a の値に対して，出現する値をプロットした「分岐図」．四角で囲んだ周期倍化の様子は周期が大きいところで自己相似になる．

から完全な自己相似性を示さないのは，irrelevant parameter が含まれるためとするなら，最初の分岐から完全な自己相似性を示す「固定点写像」があるのではないだろうか．

これが Feigenbaum による周期倍化系の繰り込み群である[6]．ロジスティック写像に限らず，頂点付近が 2 次関数で表せるひと山の 1 変数関数は十分多数回の周期倍化を経るとこの固定点写像で記述される．したがって，自己相似性を特徴付ける「相似比」はそのような関数すべてに共通なユニバーサルな値となることがわかる．

8. おわりに

繰り込み群の考え方は物性物理の分野で広く使われているので，取り上げられなかった重要な話題はまだいくつもある．3 つだけ挙げておこう．一つは相互作用のあるフェルミ粒子系の問題である．これについては，Shankar のレビューを参照していただきたい[7]．二番目は高分子の繰り込み群であり，de Gennes の教科書がよく知られている[8]．最後は，大野らによって始められた特異性を持つ偏微分方程式系の繰り込み群である[9]．これはまだ広く応用されているとは言いがたいが，さまざまな方向へ発展する可能性を秘めていると思う．

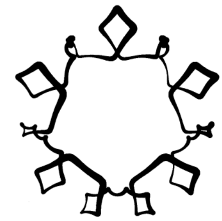
本稿では，臨界現象以外の応用も念頭において，普通の解説よりは少しだけ安定固定点の役割を強調した．分子動力学などでは，計算時間を短縮するために，うまく粗視化したモデルが求められる．今のところは視察によって粗視化モデルが作られているが，なんらかの繰り込み群的操作によって粗視化モデルが構成できれば見通しがよい．その際に重要になるのは，不安定固定点ではなく安定固定点だろう．

参考文献

1) K.G. Wilson 自身の仕事については，ノーベル賞講演を一読されることをお勧めする．
2) P.W. Anderson,『凝縮系物理学の基礎概念』(吉岡書店)．
3) R.H. Swendsen, *Phys. Rev. Lett.* **42** (1979) 859.; C.F. Baillie *et al.*, *Phys. Rev.* B **45** (1992) 10438.
4) G. Vidal, *Phys. Rev. Lett.* **99** (2007) 220405.
5) S.R. White, *Phys. Rev. Lett.* **69** (1992) 2863.; S.R. White, W. Wilkins and K.G. Wilson, *Phys. Rev. Lett.* **56** (1986) 412.; S.R. White and R.L. Martin, *J. Chem. Phys.* **110** (1999) 4127.
6) M.J. Feigenbaum, *J. Stat. Phys.* **19** (1978) 25.; *J. Stat. Phys.* **21** (1979) 669.
7) R. Shankar, *Rev. Mod. Phys.* **66** (1994) 129.
8) P.G. de Gennes,『高分子の物理学』(吉岡書店)．
9) N. Goldenfeld *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **64** (1990) 1361.

(きくち・まこと，大阪大学サイバーメディアセンター)
(おかべ・ゆたか，首都大学東京大学院理工学研究科)

双対性という概念



高柳　匡

1. はじめに

一般的に，物理学において対称性という考え方は極めて重要である．何故ならば，対称性があると物理の法則に従って未来を予測したり，様々な物理量を計算することが，対称性がない場合に比べてずっと簡単になるからである．

例えば，球が2次元面上を転がる場合を考えよう．もしその面が，でこぼこして複雑な形をしていたら球の運動を予測するのはとても難しい．しかし，完全に平面だと球は等速度運動するだけなので，運動の解析は容易である．これを力学の言葉で言うと，並進対称性がある，つまり球を面に沿って平行移動しても物理法則は変わらないという対称性があるので運動量が保存するという理解になる．このような対称性は，連続的な対称性と呼ばれる．何センチ球を移動させるかというのは自由に連続的に変えられるパラメーターである．

一方で，離散的な対称性というものもある．例えば，正多角形の形をしている結晶を考えると，ある特定の軸の周りに特定の角度回転したときのみ元と同じ形になるという対称性がある．ある物理の法則を考えたときに，このような離散的な対称性は，たいてい連続的なものと比べて見つけるのがより難しく，その分より重大な結果をもたらすことが多い．

実際，量子重力理論の最有力候補と考えられている超弦理論は，2008年にノーベル賞を受賞された南部先生らが今から40年近く前に初めて提唱した弦の理論に端を発するが，ここ最近十数年の間に，全く予期されていなかった様々な離散的対称性が続々と発見されて，弦理論の分野に革命的な進歩をもたらした．この分野では，そのような離散的対称性を，**双対性**（英語では，duality）と呼んでいる．

以下では，素粒子理論におけるこの双対性という対称性とその重要性に関して基本的な例からスタートして，平易に説明してゆきたいと思う．

2. 電磁気学の双対性

最も基本的で重要な双対性は，Maxwellの古典電磁気学において既に現れている．電磁気学の基本方程式であるMaxwell方程式は，虚数 i を用いて以下の2つの式にまとめられる．

$$\begin{aligned}&\vec{\nabla}\cdot(\vec{E}+i\vec{B})=\rho_e,\\&\frac{\partial}{\partial t}(\vec{E}+i\vec{B})+i\vec{\nabla}\times(\vec{E}+i\vec{B})=\vec{j_e}.\end{aligned}\tag{1}$$

こうして書いてみると，初めてこれらの式を見た読者でも物理法則の美しさに何となく気がつくと思う．実際，真空つまり電荷と電流がゼロ $\rho_e=\vec{j_e}=0$ の場合を仮定すると電場 $\vec{E}$ と磁場 $\vec{B}$ を入れ替える変換

$$(\vec{E},\vec{B})\rightarrow(\vec{B},-\vec{E})\tag{2}$$

で不変になっている．この離散的対称性を電磁双

対性と呼ぶ.

少々脱線であるが，先に進む前に電磁気学の双対性を微分形式を用いて表してみよう．場の強さと呼ばれる，2 形式 F を次のように定義する．

$$F = \sum_i E_i dt \wedge dx_i + \sum_{ijk} \epsilon^{ijk} B_i dx_j \wedge dx_k. \quad (3)$$

ここで $i = 1, 2, 3$ は空間 3 方向を表し，ϵ^{ijk} は完全反対称テンソルである．このとき，双対性の変換は，ちょうど**ホッジ双対**（Hodge dual）と呼ばれる操作と等価で $F \to *F$ と表される．このように，数学で双対と呼ばれる操作と，電磁気学の双対性は実は等価なのである．

3. ディラックの電荷の量子化と双対性

では真空ではない場合は，どうなるのだろうか．通常の方程式 (1) を仮定する限り双対性は破れているが，今まで見つかっていないだけで実は磁荷を帯びる粒子が存在すると仮定してみよう．すると，それぞれの式の右辺が，$\rho_e + i\rho_m$ と $\vec{j}_e + i\vec{j}_m$ のように変わる．この場合には，電荷 ρ_e と磁荷 ρ_m（とそれらのカレント）の入れ換えを考えることで，双対性が成り立つ．このような磁荷を帯びた粒子を**モノポール**と呼ぶ．現在のところ，そのような粒子は発見されていないが，その存在を予言する理論は多々ある．

さて，我々の現実世界では，観測される電荷は，電子の電荷 e の整数倍に量子化されていることを経験的に知っている．この電荷の量子化を原理的に説明するのは容易ではないが，モノポールが存在すると状況が一変する．磁荷 g をもつモノポールの周りを電子が円周 C に沿って一周する場合を考えよう．このときモノポールの作る磁場による電子の波動関数 ψ の位相の変化は，ベクトルポテンシャル $\vec{A}$ を用いて，

$$\psi \to \psi \ e^{ie \int_C \vec{A} \cdot d\vec{x}} \quad (4)$$

のように書ける．この位相は，関係式 $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$ より，ストークスの定理を用いて

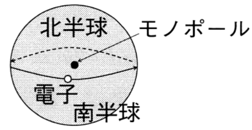


図 1 モノポールの周りを回る電子の考察．

$$ie \int_C \vec{A} \cdot d\vec{x} = ie \int_D \vec{B} \cdot d\vec{S}, \quad (5)$$

と磁場の面積分で表される．このとき D は C を境界とする 2 次元面なら何でもよいので，C を赤道と見たときに北半球もしくは南半球のどちらにとってもよい（図 1 参照）．このときの面積分の差は，モノポールを囲む 2 次元球面上の積分となるので波動関数が一意的に定まるためには，

$$e \int_{S^2} \vec{B} \cdot d\vec{S} = eg \in 2\pi \mathbf{Z} \quad (6)$$

とならなければならない．このように，磁荷があると，電荷が $\frac{2\pi}{g}$ を単位にして量子化される（ディラックの電荷の量子化と呼ばれる）．

ここで双対性を思い出すと電荷と磁荷を入れ換える変換であったが，実際にその変換で量子化の式 (6) は不変になっている．双対性は，電荷 e と最小の磁荷 $\frac{2\pi}{e}$ を入れ換える対称性とも表現できる．これは e が大きい，つまり相互作用が大きい状況と，逆に相互作用が小さい状況が，実は等価であることを意味する．電子を基本粒子と思うと結合が強くても，モノポールを基本粒子と思うと弱く相互作用した系と思えるからである．

さて，量子化の議論をもう少し先に進めてみよう．もっと一般に，電荷と磁荷が，(e_1, g_1) と (e_2, g_2) である 2 つの粒子を考える．このときの量子化条件は (6) を容易に拡張して

$$e_1 q_2 - e_2 q_1 \in 2\pi \mathbf{Z} \quad (7)$$

であることが分かる．このときに，線形変換

$$\begin{pmatrix} e' \\ g' \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e' \\ g' \end{pmatrix} \quad (8)$$

をほどこしたときに理論が変わらない条件を考えよう．電荷と磁荷はそれ自体が，量子化されているので，まず a, b, c, d はすべて整数である必要が

ある．さらに，ディラックの量子化条件 (7) が変わらないことを要求して，$ad-bc=1$ であることが容易に導かれる．この変換は，数学では $SL(2,\mathbf{Z})$ 変換と呼ばれ，より一般的な**双対変換**と見なせる．

4. 超対称性ゲージ理論と双対性

以上では電磁気学における双対性を見たが，双対性は，もっと一般的な理論，特に非可換ゲージ理論と呼ばれる理論においても重要な役割を果たす．素粒子理論の，弱い相互作用や強い相互作用は非可換ゲージ理論で記述される．

ゲージ理論の説明は坂井氏や永長氏の記事を読んでいただくとし，ここでは $U(N)$ の非可換ゲージ理論は，電磁気学の場（ゲージ場）を数ではなく $N\times N$ のエルミート行列にした場の理論としておく．その作用を場の強さ F を用いて書くと，

$$S=\frac{1}{2e^2}\int \mathrm{Tr}F\wedge *F+\frac{i\theta}{4\pi^2}\int \mathrm{Tr}F\wedge F$$

となる．ここで，θ は，理論のある新しいパラメーターで，Tr は，行列のトレースである．

電磁気では，双対変換を $e\to\frac{2\pi}{e}$ の変換と思うことができたが，非可換ゲージ理論の場合は，少しだけそれを拡張して，複素化した結合定数 $\tau=\frac{\theta}{2\pi}+\frac{2\pi i}{e^2}$ を用いて双対変換を

$$\tau\to\frac{a\tau+b}{c\tau+d} \tag{9}$$

と表す．

非可換なゲージ理論は，量子効果の影響で相互作用が強いので，そのままでは解析は難しい．しかしながら，**超対称性**があると量子効果がより簡単なものになり，厳密な解析が可能になることがある．超対称性とは，ボソン（スカラー場やゲージ場）とフェルミオン（スピノル場）を入れ換える対称性のことである．最大の超対称性を持つゲージ理論（$\mathcal{N}=4$ 超対称性ゲージ理論）は，ゲージ場以外にさらにスカラー場やフェルミオンの物質場を加えたもので，これらを入れ換える超対称性を4種類も持っている．この $\mathcal{N}=4$ 超対称性ゲージ理論は，繰り込みの効果が完全にボソンとフェルミオンで相殺することが知られていて，ゲージ理論の中で最も美しい理論と言える．実際，この理論では双対性が厳密に成り立つと思われており，その分配関数が双対性を満たすことがいくつかの場合には解析的に示されている．この双対性は，超弦理論のS双対性の証拠とも解釈され，ストリング双対性の発見のきっかけの一つとなった．

5. ストリング双対性 (1)：T 双対性

自然界の4つの力のうち，重力だけは，通常の素粒子論の方法では量子的に扱うことはできないことが知られている．量子効果で除去できない紫外（高エネルギー）発散が出てしまうからである．この発散は，素粒子を大きさのない点と思っていることから来ている．そこで，点ではなく見えないくらい小さいが大きさ l_s をもつ弦を考えてみよう．弦の立場では，弦より小さい長さを識別することはできない．相対論的量子論では，「小さい長さ=大きな運動量・エネルギー」なので，弦の立場では，紫外領域が自然にカットオフされて，発散がでなくなると期待される．このような発想に基づいた理論が弦理論である．安定な理論を得るためには，超対称性を導入する必要があり，これを超弦理論と呼ぶ．

この弦の最も基本的な性質を如実に示したのが，**T 双対性**（T-duality）と呼ばれる双対性である．超弦理論の時空は，10次元（= 時間1次元 + 空間9次元）でないと矛盾が生じてしまう．そこで通常，我々の住む4次元時空の他に，とても小さい6次元のコンパクトな空間が存在していると仮定する．コンパクトな空間の最も簡単な例である半径 R の円周 S^1 を例にとり，T双対性を説明しよう．まず，弦には2つの自由度がある（図2参照）．まず，円周に沿って運動する自由度．もう一つ弦が円周に巻きつく自由度．後者は弦理論特有である．それぞれの最小の励起の伴うエネルギーは，

$$E_{\text{運動}}=\frac{1}{R},\quad E_{\text{巻付}}=2\pi RT=\frac{R}{l_s} \tag{10}$$

となる．ここで，$T=\frac{1}{2\pi l_s^2}$ は弦の張力である．こ

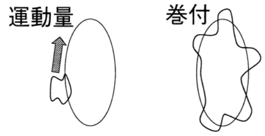


図2　円周中の弦の運動（右）と巻き付き（左）．

の式から分かるように，変換

$$R \to \frac{l_s^2}{R} \tag{11}$$

で，両者のエネルギーが入れ換わり弦の質量スペクトラムが不変になっている．この離散的な対称性をT双対性と呼ぶ．半径が小さな空間と，大きな空間が弦理論では等価になるのである．弦理論には，**最小の長さのスケール** l_s が存在することを意味するのである．

6. ストリング双対性 (2)：S双対性

以上のように，半径を入れ換えるのがT双対性の本質であった．実は，超弦理論には，より非自明でとても重要な双対性がもう一つある．これが**S双対性**（S-duality）である．これを理解するには，**Dブレーン**（D-brane）と呼ばれるものを説明しなくてはならない．弦には，端がない筒のようなもの（閉弦）と両端がある帯状のもの（開弦）の2種類ある．時空の重力を生み出すのが前者で，後者は，電磁気や強弱相互作用といったゲージ理論を作り出す．開弦ではその両端点の扱いが重要であるが，そこでの境界条件にはノイマンとディリクレの2つがある．それを組み合わせて，10次元時空の中で，$(p+1)$ 次元の部分空間にのみ開弦が端点を持つという条件を置くことができる．そのときの $(p+1)$ 次元の空間を **D*p* ブレーン**と呼ぶ．低いエネルギーでの励起は，その端点付近で起こり，結果として開弦の理論は，Dブレーン上のゲージ理論と思うことができる．Dブレーンは何枚でも重ねることができ，N 枚重ねると $U(N)$ のゲージ群を持つゲージ理論になる．

超弦理論には5種類あるが，ここではタイプIIBと呼ばれる理論を考える．この場合Dpブレーンの空間次元 p は，奇数のみ許される．特に，$p=1$ を考えると，弦として振る舞う物体（D弦と呼ぶ）で，超弦理論を定義する弦（F弦と呼ぶ）と似ている．それらの弦の張力は，アインシュタイン形式で規格化すると次式で表される．

$$T_{\mathrm{D}} = \frac{1}{2\pi l_s^2 \sqrt{g_s}}, \quad T_{\mathrm{F}} = \frac{\sqrt{g_s}}{2\pi l_s^2}. \tag{12}$$

この式から分かるように，結合定数の強弱の変換

$$g_s \to \frac{1}{g_s} \tag{13}$$

でD弦とF弦は入れ代わるのである．したがって，D弦も含めるとタイプIIBは，(13) の変換で不変になっている．この双対性をS双対性と呼ぶ．

このS双対性は，既に解説した電磁気学や超対称性ゲージ理論の双対性と変換が同じ形になっていることに気がつく読者もいるだろう．実際，N 枚のD3ブレーンを考えると，$\mathcal{N}=4$ 超対称性 $U(N)$ ゲージ理論で記述されることが分かる．このときに，タイプIIB理論の (13) の変換を $SL(2,\mathbf{Z})$ に拡張したものは，(9) と全く同じものになる．その場合の電子とモノポールは，F弦とD弦がそれぞれD3ブレーンに端点を持った状態に相当する．このようにして，タイプIIB理論のS双対性は，ゲージ理論の双対性を含んでいるのである．

以上のように双対性は，超弦理論の強結合領域を，より解析しやすい弱結合の理論に置き換えてくれるのである．他の4つの超弦理論の強結合領域もそれぞれ双対性を用いて解析することができる．特にタイプIIAの理論の強結合極限は，M理論と呼ばれる11次元の理論になっていると思われている．これらの関係は，超弦理論のパラメーター（結合定数など）空間内の離散的な対称性と言えるが，それらを総称して通常**ストリング双対性**（String Duality）と呼んでいる．

7. AdS/CFT 対応

このように5つの超弦理論がストリング双対性の発見によってすべてつながり，統一的視点が得られるようになったのが，1994–95年の間の出来

事であった．ところが，ストリング双対性の研究も終盤に近づいたその数年後の1997年に全く別な双対性が発見された[2]．これが**AdS/CFT対応**である．10年経過した今でも，AdS/CFT対応は，超弦理論の最も主流な研究テーマになっている[3]．その理由は，他の双対性と違い何故そのような対応が成り立つのか理解が進んでいないからである．その原理は今でもなお神秘のベールに包まれているのである．

さて，AdS/CFT対応とは，重力とゲージ理論の対応，すなわち「$(d+1)$次元の**反ドシッターと呼ばれる空間**（AdS空間）上の重力理論は，d次元の**共形場理論**（CFT）と等価である.」という主張である．共形場理論とは，長さのスケールを定数倍変化させても不変な場の理論のことである．

この対応を理解するために，前にも出てきたタイプIIB理論におけるN枚のD3ブレーンを思い出そう．この系は，開弦の立場で低エネルギー領域を考えると$\mathcal{N}=4$超対称性ゲージ理論で記述されるのは既に説明した．実際，この理論は量子効果が厳密に相殺されるので共形場理論となっている．では閉弦の立場，すなわち重力理論の立場ではどう記述されるのだろうか？ ブレーンの枚数Nが大きいと，非常に重い物体なので一般相対性理論に従って時空は曲がる（図3参照）．時空の計量を調べると，ブレーンに近づくにつれ，10次元時空は，5次元反ドシッター空間と5次元球面の直積$\mathrm{AdS}_5\times S^5$に近づくことが分かる．

$(d+1)$次元の半径Rの反ドシッター空間AdS_{d+1}は，時間が2つある$(d+2)$次元空間

$$ds^2=-dX_0^2-dX_{d+1}^2+dX_1^2+\cdots+dX_d^2 \quad (14)$$

内の超曲面$X_0^2+X_{d+1}^2=X_1^2+X_2^2+\cdots+X_d^2+R^2$として定義される．これが共形場理論と同じ$SO(2,d)$の対称性を持つことは明白である．

うまく座標をとると，反ドシッター空間の計量は以下のような簡単な形になる

$$ds^2=R^2\frac{dy^2-dx_0^2+\sum_{i=1}^{d-1}dx_i^2}{y^2}. \quad (15)$$

この座標系では，共形場理論のスケール変換は，

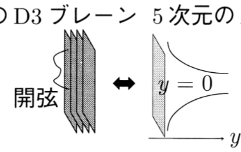


図3　AdS/CFT対応の概念図.

$$x_\mu\to\lambda x_\mu,\quad y\to\lambda y \quad (16)$$

に対応する．

さて，先ほどのD3ブレーンの例に戻ろう．超弦理論に矛盾がないためには，開弦と閉弦のどちらの記述でも同じ物理的結果が得られるべきである．後者の側で，ブレーン近傍をクローズアップする極限（Near Horizon Limit）をとったが，これは前者の言葉で言うと重い開弦の励起を無視することに相当する．したがって，「$\mathrm{AdS}_5\times S^5$上のタイプIIB理論は，$\mathcal{N}=4$超対称性$SU(N)$ゲージ理論と等価である」という予想が得られる．これは前述のAdS/CFT対応の主張の特別な場合$\mathrm{AdS}_5/\mathrm{CFT}_4$になっている．このように，AdS/CFT対応は，ブレーンの近傍を重力とゲージ理論の両者の立場で考察することで導かれる．

この対応では，共形場理論（ゲージ理論）と比べて重力理論は，1次元高い反ドシッター空間に住んでいる．(15)の座標で言うと，x^μは共通の座標で，yが重力理論にのみ存在する余分な座標ということになる．この謎を解くには，スケール変換(16)でyが変化することに注目する．つまり，yはゲージ理論の長さのスケールに対応しているのである．特にAdS空間の境界$y=0$は，共形場理論の立場では紫外極限に相当するので，微視的な立場では共形場理論はここに住んでいると考える場合が多い．共形不変性を破った場合を考えても同様な対応は成り立つと考えられているが，その場合には繰り込み効果でエネルギーによって結合定数が変化してゆく．双対な重力の立場ではyの逆数をそのエネルギースケールと見なすのである．ある次元の場の理論に，より高次元の重力理論の情報が含まれていることから，このような関係を**ホログラフィー**と呼んだりもする[3]．

では，この双対性はいったい具体的な物理量に関して何を予言するのだろうか？ 一般的な原理は，「**重力理論の分配関数＝共形場理論の分配関数**」と簡単に表せる．ここで，共形場理論は外場やパラメーター（例えば結合定数）を含み，それらは，重力理論側に含まれる様々な場（例えばディラトン）の AdS 空間の境界 $y=0$ での値で表される．したがって，それらで微分することで，共形場理論の相関関数も重力側から計算することができるのである．

最後に，この AdS/CFT 対応のご利益について触れたい．先ほどの D3 ブレーンの例を調べてみると，ブレーンの枚数 N や結合定数 g_s が大きいほど AdS 空間の半径が大きくなる．重力側から見ると，半径が大きいほど弦理論的な補正を無視できるようになり，一般相対論のような古典的な重力理論で扱うことができる．しかしながら，共形場理論側から見ると，その領域は強結合になっていてファインマングラフを用いた摂動計算がしづらい状況になっている．このように AdS/CFT 対応は，ある意味，強結合を弱結合に移すという S 双対性に似た対応関係になっているのである．このことを応用すると，ゲージ理論の強結合という難しい問題を，古典重力理論というより簡単な問題に置き換えることができるので現在でも AdS/CFT 対応の応用が盛んに研究されている．

8. おわりに

以上では，素粒子理論における様々な双対性の考え方を説明してきた．超弦理論における双対性のうち，T 双対性や S 双対性はかなり理解されており，超弦理論の非摂動的側面の理解に役立ってきた．一方，AdS/CFT 対応は，長年研究され様々な具体例があるにも関わらず，まだその原理自体は理解されたというにはほど遠い．AdS/CFT 対応の証明は，この分野において最も重要な課題の一つであるが，それにはまだ十年以上かかるだろうと予想する研究者も多い．

AdS/CFT 対応は，一見全く異なる 2 つの理論を結びつけ，片方の理論で解析が困難な領域が，もう片方では容易に解析できるような仕組みになっている．したがって，様々な物理系への応用が大変興味深い．最近，**物性物理への応用**も試みられるようになってきた[4]．物性物理では，(2＋1) 次元の系が研究の対象になることが多い．(2＋1) 次元の臨界点を記述する共形場理論がもし AdS/CFT 対応があるとすると，4 次元の反ドシッター空間が現れるはずである．最近，AdS_4/CFT_3 の良い例が見つかり，発見者の頭文字をとって ABJM 理論と呼ばれている[5]．この理論は，2 つのチャーン・サイモンズ型の $U(N)$ ゲージ場とそれと結合する物質場からなり，ゲージ場のラグランジアンは，

$$\mathcal{L}=\frac{k}{4\pi}[\mathrm{Tr}A^{(1)}\wedge dA^{(1)}-\mathrm{Tr}A^{(2)}\wedge dA^{(2)}] \qquad (17)$$

で与えられる（k は自然数でレベルと呼ばれる）．チャーン・サイモンズ理論は，量子 2 次元系において重要であり例えば，量子ホール効果で活躍する．この目新しい共形場理論も，もしかすると実験室で作れる物質で実現できるのかもしれない．

参考文献

1) ストリング双対性に関しては，例えば，有名な教科書 J. Polchinski, "String theory. Vol.2," Cambridge, UK: Univ. Pr. (1998) を参照.
2) 原論文は J.M. Maldacena, *Adv. Theor. Math. Phys.* **2**, 231 (1998) [arXiv:hep-th/9711200]. 専門的なレビューは，O. Aharony *et. al.*, *Phys. Rept.* **323**, 183 (2000) [arXiv:hep-th/9905111] を参照.
3) 本誌 2007 年 12 月号特集における高柳の記事を参照.
4) 短くまとまったレビュー論文としては，S. Sachdev, M. Mueller, "Quantum Criticality and Black Holes." arXiv:0810.3005 を参照.
5) O. Aharony, O. Bergman, D.L. Jafferis and J. Maldacena, *JHEP* **0810** (2008) 091 [arXiv:0806.1218 [hep-th]].

（たかやなぎ・ただし，東京大学数物連携宇宙研究機構（IPMU））

対称性の考察

物理における重要性



高橋　實

1. はじめに

物理学では答えがはっきりわからない場合でも対称性ははっきりしている場合が多い．このような場合対称性をまず考察することによって，答えの手掛かりが得られることが多い．また2次相転移は一般に対称性が変わる現象である．このようなことから対称性の考察は理論物理学において非常に基本的なものである．この記事ではまず2次元イジング模型の双対性（duality）について解説する．その後で量子的な模型であるハイゼンベルグ模型，XXZ模型について考察する．また固体中の電子の模型での $SU(2)$ 対称性について考察する．電子と正孔の対称性を用いることによって引力型の場合と斥力型の模型とは密接に関連している．

2. 2次元イジング模型の双対性（duality）

正方格子上のイジング模型を考察しよう．また周期境界条件を課すことにするので正確には2次元トーラス上の格子である．ハミルトニアンは

$$H = -J \sum_{\langle i,j \rangle} \sigma_i^z \sigma_j^z, \tag{1}$$

とし，i, j はサイトを表すものとする．また $\langle i,j \rangle$ は i と j が最近接である場合についての和を表すものとする．この模型は厳密に解くことができることはよく知られているがかなり複雑な計算が必要になる．しかし低温と高温の双対性（duality）に着目すれば転移温度を簡単に予測することができる．これも対称性の考察の重要性を示す一例である．この場合，高温であれば分配関数は次のように計算することができる．

$$\begin{aligned}
Z &= \sum_{\sigma_i^z=\pm 1} \exp\left(\frac{J}{T} \sum_{\langle i,j \rangle} \sigma_i^z \sigma_j^z\right) \\
&= \sum_{\sigma_i^z=\pm 1} \prod_{\langle i,j \rangle} \cosh\left(\frac{J}{T}\right)\left[1+\tanh\left(\frac{J}{T}\right)\sigma_i^z \sigma_j^z\right] \\
&= 2^N \left(\cosh\left(\frac{J}{T}\right)\right)^{2N} \\
&\quad \times \left[1+\sum_{m=4}^{2N} g(m)\left(\tanh\left(\frac{J}{T}\right)\right)^m\right].
\end{aligned}$$

ここで $g(m)$ は格子上のボンドの数が m の閉じたグラフの数である．

一方低温での分配関数はどのようになるであろうか？ ここでは多数のスピンが同じ値 $\sigma_i = +1$ または -1 で，基底状態エネルギーは $-2NJ$ である．そして励起としては逆向きスピンがところどころに点在するわけである．1個の孤立した逆向きスピンは基底状態に較べてエネルギーが $8J$ 高い．また複数のスピンが反転した状態の数はエネルギーが $2mJ$ であれば閉じたグラフの数 $g(m)$ である．したがって低温では分配関数は

$$Z = 2\exp\left(\frac{2NJ}{T}\right) \times \left[1 + \sum_{m=4}^{2N} g(m)\left(\exp\left(\frac{-2J}{T}\right)\right)^m\right]$$

となる．したがって正方格子イジング模型では低温と高温の自由エネルギーは完全に対応しているのである．これをクラマース–ワニアーの双対性[1]と呼ぶ．

もし系の大きさが無限大になって自由エネルギーが1個の特異温度 T_c をもつならば，展開パラメーター $\tanh\left(\frac{J}{T_c}\right)$ と $\exp\left(\frac{-2J}{T_c}\right)$ は一致すると考えられる．2次方程式は簡単に解けて $\exp(2J/T_c) = 1+\sqrt{2}, T_c = 2.26919J$ が得られる．分子場近似では $T_c = 4J$ であるが，この結果はだいぶ小さくなった．これはオンサーガーの厳密解[2]がわかる前に計算されたものであり，双対性の考察だけで厳密な転移温度が計算できたことは大変興味深いことである．もちろんここでは熱力学的極限で自由エネルギーが一個の特異点を持つという仮定を使ってはいるが．また比熱はこの特異点 T_c で対数的発散をするが，その低温側と高温側の発散の仕方は非常に対称性がよい．図1参照．これも双対性が成り立っていることから説明できる．

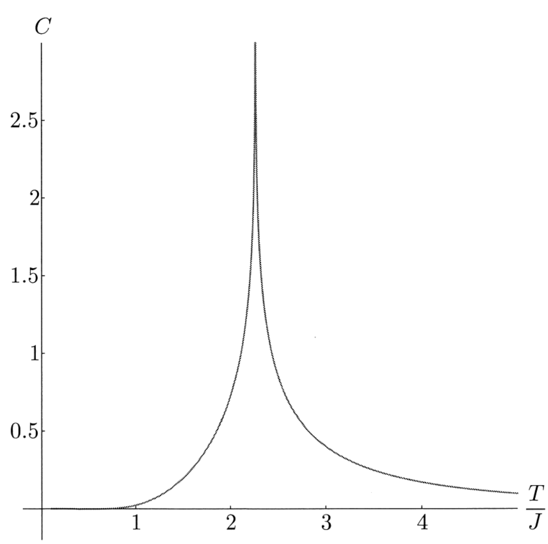


図1　2次元イジング模型の比熱．横軸は温度である．転移点をはさんで対称性がよいのは双対性の効果である．

3. 一般次元の XXZ 模型の対称性

3.1 XXZ 模型

ここでは前節のイジング模型を一般化して次のようなハミルトニアンを考える．

$$\mathcal{H}(J,\Delta,h) = -J\sum_{\langle i,j\rangle} \sigma_i^x\sigma_j^x + \sigma_i^y\sigma_j^y + \Delta\sigma_i^z\sigma_j^z - h\sum_l \sigma_l^z, \qquad (2)$$

ここで格子は1次元格子，2次元正方格子，3次元立方格子，または4次元以上の超立方格子であると仮定する．このような格子は2つの部分格子 $(\mathcal{A},\mathcal{B})$ に分けることができて，かつ $\mathcal{A}$ 部分格子の原子の最近接原子は $\mathcal{B}$ 部分格子に属している．このハミルトニアンはパラメーター Δ を含んでいて $\Delta = 1$ の場合はハイゼンベルグ模型と言われる．$\Delta = 0$ の場合は XX 模型と呼ばれる．Δ が大きい極限はイジング模型となる．各原子は上向きスピン状態または下向きスピン状態をとり，全状態数は 2^N 個となる．$\sigma_i^x, \sigma_i^y, \sigma_i^z$ はパウリスピン行列で表される．

$$\sigma_i^x = \begin{pmatrix} 0, & 1 \\ 1, & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_i^y = \begin{pmatrix} 0, & -i \\ i, & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_i^z = \begin{pmatrix} 1, & 0 \\ 0, & -1 \end{pmatrix}. \qquad (3)$$

また交換関係は

$$\begin{aligned} [\sigma_j^x, \sigma_k^y] &= 2i\delta_{j,k}\sigma_j^z, \\ [\sigma_j^x, \sigma_k^y] &= 2i\delta_{j,k}\sigma_j^x, \\ [\sigma_j^z, \sigma_k^x] &= 2i\delta_{j,k}\sigma_j^y, \\ [\sigma_j^x, \sigma_k^x] &= [\sigma_j^y, \sigma_k^y] = [\sigma_j^z, \sigma_k^z] = 0 \end{aligned} \qquad (4)$$

が成立する．ここで交換子積 $[A,B] \equiv AB - BA$ である．1次元の場合にこのハミルトニアンは可解であって特に $\Delta = 1$ の場合はベーテによって1931年に取り扱われた[3]．このベーテの方法の $\Delta \neq 1$ の拡張はオーバック[4]とウォーカー[5]が行った．C.N. ヤンと C.P. ヤンはこのハミルトニアンの基底状態を詳しく調べた[6]．ボナーとフィシャーは数値対角化の方法によって $N = 12$ までのエネルギースペクトルを求め，熱力学的性質も

研究した[7]．ここでは磁場は z 方向にかかっていると仮定する．この模型も 1 次元の場合はよく調べられているが，詳細は拙著をお読み頂きたい[10]．残念ながら 2 次元以上は厳密解は知られていない．しかしこのような場合でも対称性の考察は非常に有用である．

全磁化オペレーターは次のように定義される．

$$S^x \equiv \frac{1}{2}\sum_j \sigma_j^x, \quad S^y \equiv \frac{1}{2}\sum_j \sigma_j^y,$$
$$S^z \equiv \frac{1}{2}\sum_j \sigma_j^z. \tag{5}$$

このオペレーターは次の交換関係を持つ．

$$[S^x, S^y] = iS^z, \quad [S^y, S^z] = iS^x,$$
$$[S^z, S^x] = iS^y.$$

また S^z とハミルトニアン (2) とは交換する．

$$[\mathcal{H}, S^z] = 0.$$

S^z の固有値は $N/2, N/2-1, N/2-2, ..., -N/2$ である．このことはハミルトニアンと S^z オペレーターは共通の固有状態を持つことを意味している．ここで次のようなユニタリー変換を考えよう．

$$\mathcal{H}(J, \Delta, h) = U_1 \mathcal{H}(J, \Delta, -h) U_1^{-1},$$
$$U_1 \equiv \prod_l \sigma_l^x = U_1^{-1}. \tag{6}$$

この変換によって S^z は符号が変わり，磁場が正の場合と負の場合は同等に扱うことができる．

これはやや自明であるが，次の対称性はそれほど自明でもない．次に我々は格子が 2 つの部分格子に分けられる場合を考えよう．この場合 $\mathcal{A}$ 部分格子の原子の最近接原子はすべて $\mathcal{B}$ 部分格子に属する．このような格子を 2 つに分割可能な（bipartite）格子と呼ぶ．格子が 2 つの部分格子に分けられる（bipartite）ので次の式が成り立つ．

$$\mathcal{H}(-J, -\Delta, h) = U_2 \mathcal{H}(J, \Delta, h) U_2^{-1},$$
$$U_2 \equiv \prod_{l \in \mathcal{A}} \sigma_l^z = U_2^{-1}. \tag{7}$$

このユニタリー変換によって $\sigma_l^x, \sigma_l^y, \sigma_l^z$ は $l \in \mathcal{A}$ の時に $-\sigma_l^x, -\sigma_l^y, \sigma_l^z$ となる．(7) の意味することは J と Δ が同時に符号を変えても，エネルギー固有値は全く変わらないことを意味する．

3.2 ハイゼンベルグ模型の $SU(2)$ 対称性

$\Delta = 1$ のときハミルトニアン (2) と全スピンオペレーター (5) の間には次の交換関係が成り立つ．

$$[\mathcal{H}, S^x] = -2hiS^y, \quad [\mathcal{H}, S^y] = 2hiS^x.$$

次の新しいオペレーターを定義すると

$$S^+ = S^x + iS^y, \quad S^- = S^x - iS^y,$$
$$S^2 = (S^x)^2 + (S^y)^2 + (S^z)^2,$$

以下の関係が成り立つ．

$$[S^+, S^-] = 2S^z, \quad [S^z, S^\pm] = \pm S^\pm,$$
$$[\mathcal{H}, S^\pm] = \mp 2hS^\pm, \quad [\mathcal{H}, S^2] = 0.$$

ハミルトニアンと S^z の固有状態 $|\psi\rangle$ がそれぞれ固有値 E と l を持っているとしよう．このとき $S^+|\psi\rangle$ と $S^-|\psi\rangle$ もゼロでなければ，また固有状態で固有値は $E \mp 2h$ と $l \pm 1$ である．

このようにして，一番高い l を持つ状態から 1 群の状態を作ることができる．$|\psi\rangle$ が $\mathcal{H}$ と S^z の固有状態であって $S^+|\psi\rangle = 0$ であったとしよう．このとき次のことを示すことができる．

$$\langle\psi|(S^+)^n(S^-)^n|\psi\rangle$$
$$= n(2l+1-n)\langle\psi|(S^+)^{n-1}(S^-)^{n-1}|\psi\rangle. \tag{8}$$

この一連の状態は有限でなければならない．したがって $2l+1$ は整数でなければならず，l は整数または半奇整数でなければならない．我々は $2l+1$ 個の状態を得る．

$$\left[\prod_{k=1}^{n} k(2l+1-k)\right]^{-1/2} (S^-)^n|\psi\rangle,$$
$$n = 0, 1, ..., 2l. \tag{9}$$

この状態の S^z に対する固有値は $l, l-1, l-2, ..., -l$ である．これはスピン自由度に対する $SU(2)$ 対称性である．

4. ハバード模型の対称性

4.1 電子と正孔の対称性

狭いバンドでの電子の問題ではハバード模型は有名で最もよく研究されている．この模型は金属・非金属転移（またはモット転移）の問題と関係している．電子が半分入った状態でかつ斥力が強い場合は絶縁体となり，有効ハミルトニアンはハイゼンベルグ反強磁性模型となる．ハバード模型のハミルトニアンは次のようなものである．

$$\begin{aligned}\mathcal{H}(t,U,A,h) = &-t\sum_{\langle ij\rangle}\sum_{\sigma}(c_{i\sigma}^{\dagger}c_{j\sigma}+c_{j\sigma}^{\dagger}c_{i\sigma})\\ &+U\sum_{i}c_{i\uparrow}^{\dagger}c_{i\uparrow}c_{i\downarrow}^{\dagger}c_{i\downarrow}\\ &-A\sum_{i}(c_{i\uparrow}^{\dagger}c_{i\uparrow}+c_{i\downarrow}^{\dagger}c_{i\downarrow})\\ &-h\sum_{i}(c_{i\uparrow}^{\dagger}c_{i\uparrow}-c_{i\downarrow}^{\dagger}c_{i\downarrow}).\end{aligned} \quad (10)$$

ここで $c_{j\sigma}^{\dagger}$ と $c_{j\sigma}$ は電子のサイト j での生成と消滅の演算子である．$\langle ij\rangle$ はサイト i と j が最近接であることを意味する．このような演算子は次の関係を満足する．

$$\begin{aligned}&\{c_{i\sigma},c_{j\sigma'}\}=\{c_{i\sigma}^{\dagger},c_{j\sigma'}^{\dagger}\}=0,\\ &\{c_{i\sigma}^{\dagger},c_{j\sigma'}\}=\delta_{ii'}\delta_{\sigma\sigma'}.\end{aligned} \quad (11)$$

ここで反交換子積 $\{A,B\}\equiv AB+BA$ である．格子は前節と同様に任意次元の超立方格子とする．U は電子間の相互作用を表している．$U>0$ は斥力型であり，$U<0$ は引力型である．h は z 方向の磁場の強さであり，A は電子の化学ポテンシャルである．この模型も XXZ 模型と同様に 1 次元の場合はリーブ・ウの厳密解[9]が存在し，非常によく調べられている．詳細は拙著をお読み頂きたい[10]．2 次元以上は物性物理学においても超難問である．しかし対称性の考察によってかなりの有用な結果が得られる．一つ一つのサイトは 4 つの状態を持つ．すなわち空の状態 $|0\rangle$，上向きスピン状態 $c_{j\uparrow}^{\dagger}|0\rangle$，下向きスピン状態 $c_{j\downarrow}^{\dagger}|0\rangle$，完全につまった状態 $c_{j\uparrow}^{\dagger}c_{j\downarrow}^{\dagger}|0\rangle$．したがって全部の状態数は 4^N である．次のような量はハミルトニアンと交換し，したがって保存量である．

$$N_{\uparrow}=\sum_{j}c_{j\uparrow}^{\dagger}c_{j\uparrow},\quad N_{\downarrow}=\sum_{j}c_{j\downarrow}^{\dagger}c_{j\downarrow}.$$

次に我々は格子が 2 つの部分格子に分けられる場合を考えよう．分割可能な格子の上でのハバード模型は XXZ 模型のときと同じように予想外の対称性を持つ．

ここでオペレーターを次のように書き換えよう．

$$c_{j\sigma}\to(-1)^{j}c_{j\sigma}^{\dagger},\quad c_{j\sigma}^{\dagger}\to(-1)^{j}c_{j\sigma}.$$

ここで $(-1)^j$ は $j\in\mathcal{A}$ のとき 1，$j\in\mathcal{B}$ のとき -1 を意味するものとする．

この変換によって次の関係が得られる．

$$\begin{aligned}\mathcal{H}\to UN &-t\sum_{\langle ij\rangle}\sum_{\sigma}c_{i\sigma}^{\dagger}c_{j\sigma}+c_{j\sigma}^{\dagger}c_{i\sigma}\\ &+U\sum_{i}c_{i\uparrow}^{\dagger}c_{i\uparrow}c_{i\downarrow}^{\dagger}c_{i\downarrow}\\ &-(U-A)\sum_{i}(a_{i\uparrow}^{\dagger}a_{i\uparrow}+c_{i\downarrow}^{\dagger}c_{i\downarrow})\\ &+h\sum_{i}(c_{i\uparrow}^{\dagger}c_{i\uparrow}-c_{i\downarrow}^{\dagger}c_{i\downarrow}).\end{aligned} \quad (12)$$

そこでハミルトニアンと粒子数は次のように変わる．

$$\begin{aligned}&\mathcal{H}(t,U,A,h)\to UN+\mathcal{H}(t,U,U-A,-h),\\ &N_{\uparrow}\to N-N_{\uparrow},\quad N_{\downarrow}\to N-N_{\downarrow}.\end{aligned} \quad (13)$$

半分より多く詰まった状態（$N_e>N$）は半分より少なく詰まった状態（$N_e<N$）に変換される．

もし上向きスピンについてだけ粒子とホールを交換すると

$$\begin{aligned}&c_{j\uparrow}^{\dagger}\to(-1)^{j}c_{i\uparrow},\quad c_{j\uparrow}\to(-1)^{j}c_{j\uparrow}^{\dagger},\\ &c_{j\downarrow}^{\dagger}\to c_{j\downarrow}^{\dagger},\quad c_{j\downarrow}\to c_{j\downarrow},\end{aligned} \quad (14)$$

次の関係が得られる．

$$\begin{aligned}\mathcal{H}\to &-(A+h)N\\ &-t\sum_{\langle ij\rangle}\sum_{\sigma}c_{i\sigma}^{\dagger}c_{j\sigma}+c_{j\sigma}^{\dagger}c_{i\sigma}\\ &-U\sum_{i}a_{i\uparrow}^{\dagger}c_{i\uparrow}c_{i\downarrow}^{\dagger}c_{i\downarrow}\end{aligned}$$

$$+\left(h+\frac{U}{2}\right)\sum_i(c_{i\uparrow}^\dagger c_{i\uparrow}+c_{i\downarrow}^\dagger c_{i\downarrow})$$
$$+\left(A-\frac{U}{2}\right)\sum_i(c_{i\uparrow}^\dagger c_{i\uparrow}-c_{i\downarrow}^\dagger c_{i\downarrow}),\quad (15)$$

したがって

$$\mathcal{H}(t,U,A,h)\to-(A+h)N+\mathcal{H}\left(t,-U,-h-\frac{U}{2},\frac{U}{2}-A\right),$$
$$N_\uparrow\to N-N_\uparrow,\quad N_\downarrow\to N_\downarrow.\quad (16)$$

驚くべきことに引力型ハバード模型（$U<0$）は斥力型ハバード模型（$U>0$）から調べることができる！

4.2 $SU(2)$ 対称性

全磁化オペレーターは次のように定義される．

$$S^x\equiv\frac{1}{2}\sum_j c_{j\uparrow}^\dagger c_{j\downarrow}+c_{j\downarrow}^\dagger c_{j\uparrow},$$
$$S^y\equiv\frac{1}{2i}\sum_j c_{j\uparrow}^\dagger c_{j\downarrow}-c_{j\downarrow}^\dagger c_{j\uparrow},\quad (17)$$
$$S^z\equiv\frac{1}{2}\sum_j c_{j\uparrow}^\dagger c_{j\uparrow}-c_{j\downarrow}^\dagger c_{j\downarrow}.$$

ハミルトニアン (10) とこのオペレーターの間には次の交換関係が成り立つ．

$$[S^x,S^y]=iS^z,\quad [S^y,S^z]=iS^x,$$
$$[S^z,S^x]=iS^y,\quad [\mathcal{H},S^z]=0,$$
$$[\mathcal{H},S^x]=-2hiS^y,\quad [\mathcal{H},S^y]=2hiS^x.$$

次の新しいオペレーターを定義すると

$$S^+=S^x+iS^y=\sum_j c_{j\uparrow}^\dagger c_{j\downarrow},$$
$$S^-=S^x-iS^y=\sum_j c_{j\downarrow}^\dagger c_{j\uparrow},$$

以下の関係が成り立つ．

$$[S^+,S^-]=2S^z,\quad [S^z,S^\pm]=\pm S^\pm,$$
$$[\mathcal{H},S^\pm]=\mp 2hS^\pm.$$

ハミルトニアンと S^z の固有状態 $|\psi\rangle$ がそれぞれ固有値 E と l を持っているとしよう．このとき $S^+|\psi\rangle$ と $S^-|\psi\rangle$ もゼロでなければ，また固有状態で固有値は $E\mp 2h$ と $l\pm 1$ である．

このようにして，一番高い l を持つ状態から 1 群の状態を作ることができる．$|\psi\rangle$ が $\mathcal{H}$ と S^z の固有状態であって $S^+|\psi\rangle=0$ であったとしよう．このとき次のことを示すことができる．

$$\langle\psi|(S^+)^n(S^-)^n|\psi\rangle$$
$$=n(2l+1-n)\langle\psi|(S^+)^{n-1}(S^-)^{n-1}|\psi\rangle.\quad (18)$$

この一連の状態は有限でなければならない．したがって $2l+1$ は整数でなければならず，l は整数または半奇整数でなければならない．我々は $2l+1$ 個の状態を得る．

$$\left[\prod_{k=1}^n k(2l+1-k)\right]^{-1/2}(S^-)^n|\psi\rangle,$$
$$n=0,1,...,2l.\quad (19)$$

この状態の S^z に対する固有値は $l,l-1,l-2,...,-l$ である．これはスピン自由度に対する $SU(2)$ 対称性である．この型の対称性はハイゼンベルグ模型でもあったが，ハバード模型ではこの外に隠れた $SU(2)$ 対称性が存在する．変換 (14) によって S^z,S^+,S^- は次のように変わる．

$$\eta^z=\frac{N}{2}-\sum_j(c_{j\uparrow}^\dagger c_{j\uparrow}+c_{j\downarrow}^\dagger c_{j\downarrow}),$$
$$\eta^+=\sum_j(-1)^j c_{j\uparrow}c_{j\downarrow},\quad (20)$$
$$\eta^-=\sum_j(-1)^j c_{j\uparrow}^\dagger c_{j\downarrow}^\dagger.$$

このオペレーターは次の関係を持っている．

$$[\eta^+,\eta^-]=2\eta^z,$$
$$[\eta^z,\eta^\pm]=\pm\eta^\pm,\quad (21)$$
$$[\mathcal{H},\eta^\pm]=\mp(U-2A)\eta^\pm.$$

このようにしてハミルトニアンの固有状態に対して η^- オペレーターを作用させることによって，一連の状態を作ることができる．2 つに分けられる格子の上でのハバード模型は $SU(2)\times SU(2)$ 対称性を持つのである[8]．ハバードハミルトニアン (10) の固有状態は量子数 η,η_z,S,S^z で分類で

きる．ハミルトニアンの固有状態 $|\psi\rangle$ が次の関係を満足するとしよう．

$$\mathcal{H}|\psi\rangle = E|\psi\rangle, \quad \eta^+|\psi\rangle = 0, \eta^z|\psi\rangle = l'|\psi\rangle,$$
$$S^+|\psi\rangle = 0, \quad S^z|\psi\rangle = l|\psi\rangle, \qquad (22)$$

このとき次の一連の状態を作ることができる．

$$|n, n'\rangle = \Big[\prod_{k=1}^{n} k(2l+1-k) \prod_{k'=1}^{n'} k'(2l'+1-k')\Big]^{-\frac{1}{2}} \times (\eta^-)^{n'}(S^-)^n|\psi\rangle,$$
$$n = 0, 1, ..., 2l, \quad n' = 0, 1, ..., 2l'. \qquad (23)$$

演算子 $\mathcal{H}, S^z, \eta^z$ に対する固有値は $E + 2nh + (U - 2A)n', l - n, l' - n'$ となる．

■ 5. あとがき ■

ここでとりあげた対称性は物理学における対称性のごく一部にしかすぎない．

しかしこのように対称性を考察するだけで，理論物理では多くの有用な結論を導くことができる．解を求める前にどのような対称性が存在するかを考えるのは大切なことである．

参考文献

1) Kramers H.A. and Wannier G.H. (1941) *Phys. Rev.* **60** 252.
2) Onsager, L.(1944) *Phys. Rev.* **65** 117.
3) Bethe, H.A. (1931) *Z. Physik* **71**, 205.
4) Orbach, R. (1958) *Phys. Rev.* **112**, 309.
5) Walker, L.R. (1959) *Phys. Rev.* **116** 1089.
6) Yang, C.N. and Yang, C.P. (1966a) *Phys. Rev.* **147**, 303; **150**, 321; **151**, 258.
7) Bonner J.C. and Fisher, M.E. (1964) *Phys. Rev.* **135**, A640.
8) Yang, C.N. (1989) *Phys. Rev. Lett.* **63** 2144.
9) Lieb, E.H. and Wu, F.Y.(1968) *Phys. Rev. Lett.* **20**, 1443.
10) Takahashi, M, "Thermodynamics of One-Dimensional Solvable Models", Cambridge University Press (1999).

（たかはし・みのる，東京大学名誉教授）

理論と実験の関係：現状と課題

岡田　安弘

1. はじめに

現代の素粒子物理学はその始まりから理論と実験の分業体制で行われてきた．少数の例外を除いて，20 世紀以降の素粒子物理は，理論家と実験家という別の専門家の手によって進められてきた．近年になってこれに加えて加速器科学者という専門家が加わっている．この三者の係わりがなくては素粒子物理の最も重要な課題に答えることは考えられない．

そもそも，素粒子物理学は物質の最も基本的な単位は何か，そしてその基本的な構成要素の間にはどのような力が働いているかを明らかにすることを目的としている．素粒子物理の歴史を振り返ると，その解答は時代とともに変わってきた．つまり，実験や加速器の進展とともに，それまで素粒子と思われていた粒子の内部構造がわかったり，新しい素粒子が発見されたりして，素粒子像は変化してきた．新たな発見を生むような実験は，その時代の最先端の技術を集めて初めて可能になるようなものであるので，それなりの専門家でなければ実現できない．一方，発見された事実が基本的な自然法則にとって何を意味しているのかは必ずしもいつも明らかでない．その正解を得るためには多くの理論家の長い時間をかけた試行錯誤が必要な場合もある．また，提案された理論的なアイデアを確かめるためにはより先端的な加速器を開発し実験を行うことが必要になる．素粒子物理は実験的発見と理論の進展がお互いに刺激をし合って，より深い自然界の理解に到達することによって発展してきた．

ここでは，20 世紀前半からの素粒子物理の歴史を振り返りながら，実験と理論がどのように関連してきたか，これからの課題は何かについて論じたい．

2. 原子核から陽子，中性子そしてクォークへ

20 世紀の素粒子物理学の大きな成果は，物質の内部構造が次々と見つかったことである．原子から原子核，原子核を構成する核子からその内部構造としてクォークへと，より基本的な粒子が発見された．この経過は新しい実験的発見が理論の進展を促し，その理論を検証するための実験がさらに新たな発見を生み出すという，理論と実験のキャッチボールであったといえる．

原子の中央に重くて小さな正の電荷の原子核があることは，1911 年にラザフォードによって提唱された．これは，ラザフォードの研究室で行われて α 線の散乱実験の解釈として発表されたものである．これに先立って長岡半太郎氏による土星型の原子構造模型の提案はあるものの，理論と実験の分業という意味ではまだ未分化といえるのではないか．ラザフォードの原子模型は古典論で扱うと電磁波を放出して不安定になる．この謎に取り組んで量子力学を完成させたニールス・ボーアを初めとして，ハイゼンベルグ，シュレディンガー，パウリ，ディラックらは純粋の理論物理学者といってよい．観測された物理現象から基本法則を見出すということは，もはや単純なことではなく，理論的な直感と試行錯誤の中で正しい法則を見つけるという理論の専門家が現れた．

素粒子物理の発展にとって次の画期的な出来事は中性子の発見である．1932 年にラザフォードの研究室にいたチャドウィックは，ジョリオ＝キュリー夫妻が見つけていた透過性の強い放射線は陽子と同じくらいの質量を持つ中性の粒子であることを実験的に示した．このことは，原子核はそれまで多くの人が考えていたように電子と陽子でできているのではなく，中性子と

陽子から構成されていることを意味する．そこで，陽子どうしの反発力に抗して陽子や中性子を一つに結び付けている新しい力（核力）は何かという問題が持ち上がる．これに対して，1935 年には湯川秀樹氏は原子核内で働く核力はその短い到達距離に対応した新粒子の交換によって生じると考えて，電子と陽子の中間的な質量をもった中間子の存在を理論的に予言した．湯川氏の予言した質量の粒子は宇宙線中に発見されたが，初めに見つかったのは湯川粒子が崩壊後に生じたミュー粒子であることが後になってわかった．1947 年にパウエルらは写真乾板を用いた宇宙線観測により，湯川中間子つまり π 中間子を発見した．写真乾板からは π 中間子がミュー粒子に崩壊する過程や原子核に吸収され原子核崩壊を引き起こす過程が記録されており，強い力の担い手の粒子であることが証明された．

次のステップは多数の新粒子の実験的発見によってもたらされた．当時宇宙線観測からはミュー粒子や π 中間子以外にも奇妙な新粒子が発見されたが，戦後になって数 GeV まで陽子を加速できる加速器が建設されるようになると一群の新粒子が生成された．そして，それをどのように理解するのかが大きな問題になった．その解決の最初の糸口となったのが，中野董夫氏・西島和彦氏とゲルマンによって提唱されたストレンジネスという新しい保存量の導入である．この考え方によると，K 中間子やラムダ粒子などの新粒子はストレンジネスという整数値の量を持ち，その生成過程では電荷の保存と同じように保存する．反粒子は粒子と符号が逆のストレンジネスを持つとするのは，電荷のときと同様である．一方，弱い相互作用によって崩壊する際には，ストレンジネスの数は変化してよい．加速器のエネルギーが増強されるに従ってさらに多くの新粒子が発見され，もはやこれらの多くの粒子はそれぞれが素粒子とは考えられなくなった．坂田昌一氏による陽子，中性子，ラムダ粒子を基本粒子とした坂田模型に始まる複合模型の試みは，1960 年代になってアップ，ダウン，ストレンジという 3 種類の素粒子を中間子や陽子，中性子より一つ下の階層とするクォーク模型につながることになる．そして，このような粒子の分類スキームにより理論的に予言された粒子を実験的に発見することにより，クォーク模型は確立していった．しかし，この段階では陽子の電荷の 2/3 や $-1/3$ といった半端な電荷を持った粒子が本当に存在するのかということに関しては一致する見解はなかったようである．

1960 年代の終わりに米国のスタンフォード線形加速器センター（SLAC）に 2 マイルにも及ぶ直線型の電子加速器が建設され，20 GeV まで加速された電子ビームを陽子や重陽子の標的に当てる散乱実験が行われ，状況は大きく変わる．この実験では陽子や中性子の中に含まれるより小さな粒子と電子が大角度の散乱を引き起こしたと解釈できる現象が見つかった．これは陽子や中性子が 3 つのクォークからできているという複合粒子の分類から得られた描像と見事に一致した．しかしそれでは高エネルギーの散乱実験ではほとんど自由に振る舞っているクォークが，陽子や中間子に閉じ込められたままで外へ出てこないのはなぜなのだろうか．

この問題は 1970 年代の初めに素粒子模型の有力候補として一躍脚光を浴びることとなったゲージ理論によって解決された．自然界には 4 つの基本的相互作用，つまり，重力，電磁力，強い力，弱い力が存在していることがわかっている．このうち重力は現在の実験で引き起こされる素粒子現象では無視できるほど弱いと考えられている．強い力は原子核以下の構造を作る力である．一方，1960 年代までに弱い力と電磁力についての理解も進んできており，1967 年にはワインバーグによって群論の基づいた数学的構造を持つ理論（ゲージ理論）で弱い力と電磁力を統一的に記述する理論（電弱理論）が提案されていた．1971 年にトフーフトによって電弱理論がくり込み可能であることが証明され，ゲージ理論に対する期待が高まった．1973 年にはグロス，ウィルチェックとポリツァーによって強い力の理論をゲージ理論と考えると，実験事実で要求されているように，距離が小さくなるほど力の強さが弱くなるという性質があることが理論的に示された．このことは逆に長距離では力が強くなることを意味し，クォークの閉じ込めを示唆する．ゲージ理論を基本とした電弱理論と強い力の理論（量子色力学）を合わせて現在では素粒子標準理論と呼んでいる．

1970 年代からは素粒子標準理論の様々な側面を実験的検証することで素粒子物理は発展してきた．量子色力学に関しては，衝突のエネルギーが高くなるほど働く力が弱くなるという性質は最高エネルギーの加速器が作られるたびに実験的に検証されてきた．1980 年代の高エネルギー物理学研究所（現高エネルギー加速器研究機構，KEK）のトリスタン実験，1990 年代のヨーロッパ CERN 研究所の LEP 実験まで実験で決められた力の強さは理論の予言と見事に一致している．

また，クォークの閉じ込めに関しては，量子色力学の長距離の性質を直接スーパーコンピュータを用いた大規模計算機シミュレーションによって理論計算してしまう格子ゲージ理論が進展し，量子色力学の基本的な性質として理解されるようになった．

このように，20世紀を通じて物質のより深い階層の探求は，中性子の発見 → 湯川中間子論 → π中間子の発見 → 多くの新粒子の発見 → クォーク模型 → 高エネルギー電子散乱実験 → 量子色力学と，実験的発見が新理論の提唱を生み，理論の検証の過程で新たな実験事実が見つかるというように互いに刺激しながら何世代にもわたって進化してきたことがわかる．その背景には，よりエネルギーの高い加速器の開発が原動力になってきた．戦後の多くの新粒子発見や高エネルギー電子散乱で陽子や中性子にクォークの自由度を見つけた実験は，思いもよらない新現象の出現であったといえる．

3. CP 対称性の破れと B ファクトリー実験

2008年のノーベル物理学賞は，素粒子物理における対称性の破れというテーマで南部陽一郎氏とともに小林誠氏，益川敏英氏に授与された．このうち小林氏と益川氏は，素粒子標準模型の一部をなす小林・益川理論提唱が受賞の理由である．小林・益川理論は1970年代の初めに提唱されたが，その決定的な証拠となったのはKEKとSLACで最近10年間に行われたBファクトリー実験の成果である．この経過は現在の素粒子物理がどのように理論と実験が絡み合って発展しているかという観点からも興味深い．

そもそもの問題の始まりは1964年にブルックヘブン国立研究所でクローニンとフィッチらに率いられた実験グループによる中性K中間子崩壊におけるCP対称性の破れの発見である．CP対称性のC（Charge Conjugation）とは荷電共役の対称性のことで粒子と反粒子の入れ替えに対して物理法則が不変であることを意味している．一方P（Parity）とは空間反転の対称性のことで，この対称性に対して不変であることを要求すると，ある物理現象が起きるならば，それをちょうど鏡で映したような現象も同じ確率で起きるはずである．CP対称性とはCとPの対称変換を組み合わせた対称性である．

1928年にディラックが相対論的に不変な形式に量子力学を拡張した際，その負エネルギー状態の解釈として，電子と同じ質量を持ち電荷が逆の反粒子（陽電子）が存在することを予言した．数年後に陽電子は予言通り発見されたが，その後の素粒子理論の進展により粒子に対して反粒子が存在することは素粒子の世界の一般的な性質と考えられるようになった．そして，粒子と反粒子の入れ替えについて物理法則が不変であることは素粒子の法則の基本的な性質と思われた．この考えに一石を投じたのは1956年のリーとヤンによる空間対称性の破れの可能性の指摘である．彼らはそれまでC対称性とともに物理法則の基本的な対称性と思われていたP対称性の保存則が弱い力が関与する現象では破れているのではないかと疑いそれを検証する方法を提唱した．このことはすぐに実験的に確かめられ，基本的な対称性の一角が崩れることになる．一方，粒子と反粒子の入れ替えに対する対称性は，空間反転が破れた世界ではC不変性そのものでは議論することはできないが，その代わりにCとPを組み合わせたCP対称性に対する不変性を要求することで対称性を保つことができることがわかった．1964年のクローニンとフィッチらによる実験は，このCP対称性も破れていること，つまり，粒子と反粒子の性質は完全には対称的にはなっていないことを示している．

具体的に彼らが行ったことは，中性K中間子の2つの荷電中間子への崩壊過程の研究である．中性K中間子はダウンクォークと反ストレンジクォーク，反ダウンクォークとストレンジクォークという2つの状態の量子力学的な組合せから構成されている．もしCP対称性の破れがない場合には2つの状態はちょうど1対1で混ざり合い，質量の違った2つの粒子状態として存在する．このとき，一方の状態は2つのπ中間子に崩壊できるが，他方の状態はこの終状態への崩壊は禁止される．実際，2つの状態は短い寿命と長い寿命の中性K中間子として知られており，その寿命の違いは長い寿命の状態は2つのπ中間子には崩壊できないからと考えられていた．クローニンとフィッチらは寿命の長い方の中性K中間子崩壊を注意深く調べ，1000分の1ぐらいの確率で2つのπ中間子に崩壊することがあることを発見した．このことは，ごく小さな効果ではあるが，自然法則はCP対称性が破れていることを意味する．その後の素粒子物理にとってこの破れをどのように説明するかということが大きな謎となった．

小林氏，益川氏は1972年に京都大学でこの問題の解決に取り組んだ．彼らはちょうど一年前にトフーフ

トによってくり込み可能性が証明された電弱理論の枠組みで，K 中間子で起きている CP 対称性の破れが説明できるかという問題を調べた．その当時はアップ，ダウン，ストレンジの 3 種類のクォークしか存在が確認されていなかったが，彼らは理論的には予想されていた 4 つ目のチャームクォークまで入れた場合にこの理論の範囲内で CP 対称性の破れが説明できるかということを考え，それでは無理であること，したがって 4 つのクォーク以外の新粒子が必要なことを理論的な考察から導いた．特に，クォークが 6 種類ある場合は理論には唯一の CP 対称性の破れの原因が存在するという結論を得た．4 つ目のクォークは 1974 年に発見され，1977 年には 5 つ目のボトムクォークが発見されるに至って，小林・益川理論は CP 対称性の破れを説明する有力理論と考えられるようになった．この理論によれば 6 つ目のトップクォークは存在するはずであるが，粒子と反粒子の対称性の破れの理論としての正しさを証明するにはそれだけでは十分でない．その検証方法は 1980 年代の初めに三田一郎氏らによって提案された．

三田氏らが指摘したことは，小林・益川理論が CP 対称性の破れを説明する正しい理論であるならば，ボトムクォークを含む中間子には大きな CP 対称性の破れが現れる可能性があることである．これは，K 中間子崩壊では 1000 分の 1 程度のわずかな破れの効果しか現れないのと全く違う．しかし，このことを確かめるにはいくつかの条件があり，その時点ではまだ検証実験が実現可能かどうか不確定であった．特に問題なのは大きな CP 対称性の破れの効果は B 中間子の崩壊を時間的に追うことによって初めて観測することができる点である．ピコ秒（10^{-12} 秒）というごく短い寿命しか持たない B 中間子の崩壊を時間的に追うことは困難なことと思われた．

1980 年代の終わりになってこのような実験を実現する B ファクトリー計画が持ち上がった．そのための鍵となる考えはエネルギーの違った電子と陽電子を衝突させ B 中間子と反 B 中間子対を実験室系で見て光速の何割かの速度で走らせて生成する加速器を作ることである．このような非対称な衝突型加速器はそれまでに作られたことはなかった．その上，小林・益川理論を検証するには，B 中間子の生成能力で比較して，当時の加速器の 100 倍ぐらい性能を向上させなければならない．まさに B 中間子の工場（B ファクトリー）が必要であった．

1990 年代半ばから KEK と SLAC で建設が開始された B ファクトリーは 1999 年に実験が開始された．B ファクトリー実験の測定器は KEK は Belle，SLAC は BaBar と名づけられ，それぞれ約 400 人と約 600 人の国際実験グループによって遂行された．2001 年までの実験で三田氏らによって予想されたように B 中間子で大きな CP 対称性の破れを発見することができた．両グループはこれまで，B 中間子の様々な CP 対称性の破れや稀な崩壊過程を発見し，小林・益川理論が実験室で見つかっている CP 対称性の破れを支配する理論であることを明らかにした．

1980 年代以降の比較的大きな加速器実験は，みな明確な理論的予想に基づいて周到に計画されたものである．小林・益川理論の検証を目的とした B ファクトリー実験ばかりでなく，電弱理論のゲージ粒子（Z 粒子，W 粒子）を発見した 1980 年代の CERN の陽子・反陽子衝突実験，1994 年にトップクォークを発見したテバトロン実験，1990 年代にゲージ粒子の性質の精密な測定を目的とした CERN の LEP 実験および SLAC の SLC 実験はいずれも大きな成果をあげて当初の目的を果たしている．もちろん，新しい加速器実験では当初理論的に予想もしなかったような発見を期待しているが，少なくともこれだけは明らかにできるという明確な目標を掲げて設計している．この面で 1970 年代までの素粒子物理と理論，実験，加速器の係わり方は異なっているように思える．

現在の素粒子加速器実験の最先端は CERN で実験が開始された LHC 実験である．これは，これまでの加速器で到達したエネルギー領域（あるいは小さな距離の領域）を一気に 10 倍ぐらい広げる（あるいは 10 分の 1 の小さな領域まで探索する）ことを実現する実験である．そこでは予想もしない現象が起こる可能性があるが，一方でヒッグス粒子は確実に発見できる性能を備えている．ヒッグス粒子は現在の素粒子物理の最大の課題である素粒子の質量を生成する機構を解明するためには鍵となる粒子であるので，その発見そのものが素粒子物理が新しい段階に踏み出したことを意味する．

4. リニアコライダーの実現に向けて

最後にこれからの素粒子物理における理論，実験，加速器の係わり合いの例として，現在世界的な枠組みで検討されている国際リニアコライダー計画（International

Linear Collider, ILC）にふれてみたい．

素粒子実験は1970年代中頃からはコライダー（衝突型加速器）の時代に入ったといってよい．固定標的に加速されたビームをぶつけるのに比べて，ビームどうしを正面衝突させるやり方（衝突型）は加速したエネルギーをすべて衝突反応に使えるため，より高いエネルギーを目指す素粒子実験には特に有利である．コライダーには電子と陽電子を衝突させるレプトンコライダーと陽子と陽子，あるいは陽子と反陽子をぶつけるハドロンコライダーがある．（陽子と電子・陽電子をぶつけるコライダー実験もドイツのDESY研究所で最近まで行われていた．）この2つはそれぞれ特徴があり，相補的な役割を果たしてきた．ハドロンコライダーはより高いエネルギーの加速器を作ることができる一方，陽子や反陽子は複合粒子であるために実際の高エネルギー反応に関与するのはそのうちクォークやグルーオン（強い力のゲージ粒子）の持つ一部のエネルギーである．電子・陽電子コライダーでは衝突エネルギーを微妙にコントロールすることにより，いろいろな精密測定を行うことができる．CERNでは1980年代にハドロンコライダーによってZ粒子，W粒子を発見したが，引き続いて電子・陽電子コライダーを建設し1990年代にはその粒子の性質を詳細に調べて，ゲージ理論の検証を行った．この例は2つのタイプのコライダーの相補的な役割を良く示している．

電子・陽電子リニアコライダーはTeV（＝1000 GeV）領域の物理を探る手段として，数十TeVの陽子・陽子コライダーとともに1980年代から検討されてきた．このうちハドロンコライダーはLHC実験として実現した．電子や陽電子は陽子に比べて質量が小さいので粒子の軌道を曲げることによる制動輻射が大きいため，円形のコライダーでLEPより高いエネルギーまで加速するのは技術的に困難である．そこで電子と陽電子をそれぞれ直線的に加速し中央で正面衝突させるスキームが考えられた．この加速器は単位長さあたりの加速効率を上げる，衝突点でビームを極限まで絞って衝突させるなどのそれまでの加速器に比べて技術的に大きな進展が必要である．その頃から，世界の高エネルギー加速器の研究所ではリニアコライダー実現に向けての開発研究が始められた．1990年代にSLACで行われたSLC実験はリニアコライダーそのものではないが，この新しいタイプの加速器の実証実験との側面も持っていた．私がリニアコライダーの物理的な意義の検討に係わるようになったのは1990年代の初めに東京大学の故折戸周治氏に誘われたことによる．折戸氏はそのころLEP実験の結果により注目を浴びるようになった超対称大統一理論に基づき，ヒッグス粒子の物理と超対称粒子の探索を狙って，リニアコライダープロジェクトの最初のステップとして重心系のエネルギーが500 GeVまでの加速器を早期に建設すべきとの意見を持っていた．その検討の成果はJLC-Iとして発表された[1]．その後のLEP実験等で，間接的な証拠ではあるが，ヒッグス粒子が200 GeV以下に存在するのがもっとも確からしいとなり，500 GeVをリニアコライダーの最初の目標のエネルギーにするのがよいということは次第に国際的な合意になっていった．

1990年代を通じてリニアコライダープロジェクトはアジア，ヨーロッパ，北米の3つの地域でそれぞれが進めるプロジェクトという色彩が強く，加速器の開発研究もそれぞれの地域の研究所で協力しながらも独自な方式が追求されていた．LHC実験の成果を引き継いでタイムリーにリニアコライダー建設を進めるために，世界の高エネルギー物理のコミュニティーは2004年の夏にリニアコライダーの基幹となる技術を一本化し国際的な枠組みで開発研究を進めてプロジェクト提案を行うことを決めた．そのプロジェクトの名前がInternational Linear Collider（ILC）である．2007年には理論家，実験家，加速器科学者が共同でILC Reference Design Report（RDR）を発表した[2]．これは，ILCプロジェクトの物理的な意義，測定器の概念，加速器デザインをまとめた書類で，真に国際的な枠組みでプロジェクトの全体像が示された最初のものといってよい．私はアジアからの理論家としてその編集に携わった．ILCプロジェクトは2012年までに技術設計書（Technical Design Report）の提出に向けて世界の加速器研究所が協力して加速器開発を進めている．

5. まとめ

20世紀の初めからの素粒子物理における理論と実験の関係を加速器の進展という面を含めて振り返ってみた．理論と実験が刺激をし合って素粒子像のさらに深い理解に進んでいくことは基本的には変わらない．しかし，理論的なアイデアを検証するまでに必要な技術開発や時間のスケールは時代とともに大きくなってきた．現代では素粒子物理の最も重要な疑問に答えるには理論，実験，加速器の長期にわたる世界的な規模の協力が不可欠となっている．これからの数年でLHC

実験によって素粒子物理の新しい方向が示され，それに刺激された新しい理論的な展開が起こると期待される．素粒子物理の重要で緊急な課題も変化するのではないかと思う．しかし，どのようなシナリオの場合でも，より小さな領域で起きている自然法則を解明するためには，より高いエネルギーで高性能な加速器に頼るほかはない．そのためには，LHC 実験や ILC 計画の先の準備を今から始めておく必要があるであろう．

参考文献

1) JLC-I, KEK Report 92–16, December 1992.
2) International Linear Collider Reference Design Report, August 2007, http://lcdev.kek.jp/RDR/

（おかだ・やすひろ，
高エネルギー加速器研究機構／総合研究大学院大学）

理論におけるモデルの役割と実験

今田　正俊

1. はじめに

物性物理学は，人間が自然を理解しようとする営みの最前線の一つである．この物性物理学によって，日常私たちが目にする「等身大」の物質の性質を理解することができるようになる．また**最先端技術**を支える物質と**ナノ構造**の基礎的な性質を理解し，常識を超える現象が生じるメカニズムを解明し，さらには望んだ性質や機能を持つ物質を作り出すにはどうしたらよいのかの指針を得られるようになる．この意味で物性物理学は物理学の中でも私たちの日常生活に最も密着し，現代の生活に大きな影響を与えている学問分野である．

私たちを取り巻く物質と現象，すなわち万物の多様性，躍動する自然の多彩さとその起源は，ギリシャ時代あるいはさらに遡る昔以来，人類にとっての好奇心と思索の対象である．現代になってこの謎解きは現代文明を支える最先端技術を生み出す上でもなくてはならないものとなった．

自然を構成する要素を原子や分子からさらに極微へ遡って見極めようとする素粒子物理学に対して，物性物理学は逆向きに巨視的な世界をめざす．原子構成要素である原子核と電子の持つ，質量や電荷，スピンなどの属性と粒子間の相互作用については実験的に検証された値と法則を用いた上で，物性物理学は出発する．また基礎方程式として**シュレーディンガー方程式**や**ディラック方程式**を仮定する．原子核や電子間の相互作用の中で支配的なものは**電磁的な相互作用**であるが，電磁気学の基礎法則もまた前提とする．しかし，それ以外には前提を置かずに巨視的にもおよぶ大きさの凝縮物質の性質を説明，予測し，多彩な現象の機構を説明することが物性物理学の目標である．

固体はアボガドロ数程度の原子核と，それよりも多数の電子からなっている．これらの巨大な数の原子核と電子が，主として電磁的な相互作用によって影響し合いながら運動して**凝縮物質**は構成されている．私たちが日常目にする物質の硬さのような機械的性質，電気伝導性，光学的性質，熱力学特性などのあらゆる性質や，電場，磁場，圧力，温度などの変化に対する応答は，この莫大な数の要素の絡み合いの結果である．

では，陽子，中性子，電子という単純な構成要素しかなく，基礎法則は**量子力学**と**電磁気学**，そして**相対論**だけであるにもかかわらず，この多様さが生み出されるのはどういう仕掛けによるのか？構成要素が多数集まって互いに相互作用するときに，もとの構成要素の性質だけからではおよそ想像もつかないような新たな法則性やダイナミックスが**階層構造**を伴って生み出される．この自然の持つ統計力学的な法則が，多様性が生まれる背後にある．単純な話で考えても，水素や酸素の原子としての性質を知っただけでは，川を流れる水の性質や，やかんから沸き立つ湯気，冷蔵庫でできる氷の性質を理解し，それらの間の**相転移**を予測することはできない．気体・液体・固体間の転移

のような相転移は無限に多くの要素が互いに相互作用して初めて生まれてくる現象だからである．

2. 出発点

まず，多数の原子核と電子を構成要素とする多体のシュレーディンガー方程式

$$H\psi_k = \varepsilon_k \psi_k \qquad (1)$$

を例にとってみよう．ここでハミルトニアン H は

$$H = -\sum_i \frac{\hbar^2}{2m_i}\nabla_i^2 + V \qquad (2)$$

で与えられ，m_i は粒子の質量，V は電子間，原子核間および電子と原子核の間のクーロン相互作用項である．この多体のシュレーディンガー方程式を十分な精度で解くことができれば，私たちを取り巻くものの多くの性質は説明される（相対論効果が無視できない場合にはディラック方程式に置き換えればよい）．したがって式(1)と(2)は物性物理学における「**標準模型**」あるいは「**基礎方程式**」であると考えてよい．しかしこの方程式を書き下しただけでは物質の性質は説明されないから，この方程式を解く必要があるが，現実には多体のシュレーディンガー方程式を厳密に解くことはできない．発展著しい最先端のコンピュータといえどもアボガドロ数個におよぶ多数の粒子の量子力学的な多体問題を解くことはできないし，将来も不可能である．それどころか最先端のスーパーコンピュータをもってしても厳密に解くことのできるのは要素数（粒子数）が10程度のオーダーの系でしかない．これは量子力学でヒルベルト空間の次元が自由度（要素数）の指数関数に比例して増大するという事情のためである．そして10のオーダーでは多彩な階層性が生み出される余地は大変少なく，階層性によって立ち現れてくる新たな法則性や多様性を理解することはできない．

量子力学的多体ハミルトニアンを構成するのは，粒子の運動エネルギーと相互作用エネルギーの2つである．仮に相互作用がなければ，自由粒子の問題となるから，多粒子であっても，シュレーディンガー方程式を解くことは容易である．また，相互作用の項について他の粒子からの影響をならして平均場に置き換え，一体問題に帰着させて解く平均場理論を使えば，近似的にこのハミルトニアンに従う物質の性質を理解できる場合もある．例えば強磁性や反強磁性のような磁性や超伝導，強誘電，固体などの秩序は，物質が**相転移**によってもともと持っていた系の対称性よりも低い状態に落ち込むことによって，すなわち**自発的な対称性の破れ**によって生じる．この対称性の破れそのものは平均場理論によって大づかみに理解できる．しかしいくつかの異なる対称性の破れへの傾向が競合したり，物質の構造の持つ低次元的な異方性などで対称性の破れが抑制される場合が，現代物質科学の主要な興味の対象である．このような場合には平均場理論のようなゆらぎを無視する理論の適用には大きな制約が伴う．そもそもゆらぎを無視した枠組みで豊かな階層性が生み出される可能性は低い．

そこで物性物理学では，上に述べた粒子の属性と基礎方程式の前提に加えて，さまざまな段階で，実験結果から得られる値を用いた**現象論**や，パラメタを含む**理論模型**を導入して，近似的に物性を理解し，機構を説明することが広く行なわれている．階層性の各段階に応じて異なる法則や現象論的なハミルトニアンを導入し，この段階のハミルトニアンの中に含まれるパラメタを，実験結果を再現するように決められるかどうかを議論する．

3. 理論模型と階層性

このような理論模型のなかでも，単純でよく知られたものに**ハイゼンベルク模型**[1)]や**ハバード模型**[2~4)]のようなものがある．この2つの模型を例にとって，物性物理学において階層性や複雑さがどのように生み出されてくるのか，理論と実験がどのように対話するのかを考えていこう．ハバード模型では，原子核は結晶格子点に固定されたものと考え，電子の自由度のみを扱う．さらに考察の対象を，フェルミレベル E_F の近くにある電

子の自由度に限定する．シュレーディンガー方程式に現れるハミルトニアンからわかるように，電子のエネルギーには**運動エネルギー**と**相互作用エネルギー**の寄与がある．相互作用のうち原子核との相互作用の寄与は，原子核の質量が十分重いため原子核を結晶格子点に固定して考えても良く，この場合電子に対する周期的な外部ポテンシャルとして働く．ここで電子間の相互作用を無視してシュレーディンガー方程式を解くと，電子のエネルギースペクトルは結晶の周期ポテンシャルのもとでバンドを形成する．簡単のためにフェルミレベル E_F 付近にバンド幅 W の1つのバンドが孤立している場合（単バンドと呼ぶ）を考え，他のバンドのもつエネルギー E_r はフェルミレベルから遠く離れているとしよう（$|E_r - E_F| \gg W$）．このような状況は**遷移金属化合物**や**有機化合物**などでしばしば見かけられる．常温のエネルギースケール k_BT は通常 W より小さく，これに比べて，フェルミレベルより十分エネルギーの低いバンドは電子で完全に埋められており，ゆらぐ余地はない．またフェルミレベルよりも十分エネルギーの高いバンドも完全に空になるので，ゆらがない．この事情は，今まで無視した電子間のクーロン相互作用の効果が加わった場合であっても，1つの電子が他の電子から受けるクーロン相互作用の大きさ V が，フェルミレベルと離れたバンドまでのエネルギーの差（$|E_r - E_F|$）よりも小さければ，基本的には変わらない．つまりこの場合にはフェルミレベル付近にある1つのバンドの電子のふるまいを解き明かせばよいことになる．

この場合でも，**クーロン相互作用**の大きさ V は，**バンド幅** W（すなわちこのバンドにいる電子の持つ運動エネルギーの大きさ）に比べて小さいとは限らない．もしも，$V \ll W$ ならば電子の挙動は電子間に相互作用のない系と考えて本質的には正しいが，V と W が同程度であったり，V のほうが大きい場合には，電子間のクーロン相互作用を無視した扱いは許されなくなる．上で述べた遷移金属化合物や有機化合物では実際に V が大きく，**強相関電子系**と呼ばれる．電子間クーロン相互作用は本来長距離におよぶ．しかし距離が遠くなれば相互作用は小さくなっていくから，まずは同じ原子サイト上を占める電子の間の相互作用

$$\mathcal{H}_U = \frac{U}{2} \sum_{i\sigma,\sigma'} n_{i\sigma} n_{i\sigma'} \tag{3}$$

だけを考慮した簡単化（近似）をする（但し数演算子 $n_{i\sigma} \equiv c^\dagger_{i\sigma} c_{i\sigma}$ であり，$c^\dagger_{i\sigma}$ と $c_{i\sigma}$ はそれぞれスピン σ をもった i サイトの電子の生成，消滅演算子）ことがある．もちろんこの近似は何を問題にしようとするかに応じて，妥当かどうかは吟味されなければならない．ここで U は同じサイトにいる2つの電子の感じるクーロン相互作用であるが，とりあえずはパラメタである．

運動エネルギー部分は i, j サイト間を電子がホッピングする $t_{i,j}$ に比例する項で表わされ，化学ポテンシャル μ と合わせて，

$$\mathcal{H}_K = \sum_{\substack{i,j \\ \sigma}} c^\dagger_{i\sigma} \mathcal{K}_{i,j} c_{j\sigma}, \tag{4}$$

$$\mathcal{K}_{i,j} = -t_{ij} + \mu\delta_{ij} \tag{5}$$

と書ける．ここで δ_{ij} はクロネッカーのデルタで i と j が等しいとき1でそれ以外のとき0である．全ハミルトニアンを，(3) と (4) の和から

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_K + \mathcal{H}_U \tag{6}$$

と書くとき，この模型を**ハバード模型**と呼ぶ．ハバード模型は同一原子以外の組合せの粒子間の相互作用 $\sum_{\substack{\langle ij \rangle \\ \sigma\sigma'}} n_{i\sigma} n_{j\sigma'}$ などの項についての和を含めるなどの拡張を行なってより現実を忠実に表わすことができる．

ハバード模型が正当化される道筋をもう一度考えてみることは，エネルギースケールでの階層構造がどのようにできてくるかを考える上で参考になる．電子の運動エネルギーや相互作用エネルギーはもともと，それぞれ数十 eV から百 eV にもなるような大きさである．電子はフェルミ粒子なので，パウリの排他律のためにエネルギーの低い状態から順に1つの状態に1つしか埋められない．このため固体中の電子の密度は高いから，フェルミレベルのエネルギーは高くなり，運動エネルギーはこのように大きな値を持つことになる．また密度

が高いから隣り合う電子間の距離も小さくなり，相互作用エネルギーも同程度に大きくなる．運動エネルギーと相互作用エネルギーはそれぞれ波数空間と実空間で対角的な量で，両者を同時に対角化はできない．**不確定性原理**を考えながら両者の和を最小化しようとすれば，どちらも同程度の大きさになるわけである．

問題はしかしもう少し複雑である．まず第一に，結晶の周期ポテンシャルによって電子の運動エネルギーのエネルギースペクトルはバンド構造を持つことになる．電子の原子軌道や分子軌道の拡がりに比べて，結晶の周期が長く，隣り合う原子軌道や分子軌道間の波動関数の重なりの小さいような，典型的な有機化合物や遷移金属化合物では，隣り合う原子軌道（分子軌道）の重なりから生まれる運動エネルギーが抑制される．結果としてフェルミレベル付近で孤立しているバンドのバンド幅は数 eV 以下となる．これは結晶周期ポテンシャルによって一桁エネルギースケールの小さな階層レベルが生じたことを意味する．そして第二に，上述のように運動エネルギーと相互作用エネルギーは量子力学的には互いに交換しない．このため両方のエネルギーが拮抗するときには，電子は両方のエネルギーの**競合**によって，それぞれの単独のエネルギースケールに対応する温度よりもずっと低温まで，**ゆらぎ続ける**ことになる．

電子間の相互作用を無視するときには，フェルミレベル付近のバンド幅で決まる程度の温度以下になると，電子はバンドをエネルギーの低いところから埋めていって得られる基底状態と本質的に変わらなくなり，**フェルミ液体**と呼ばれる単純な金属のふるまいに落ち着く．しかし電子間相互作用との拮抗があると，この単純なフェルミ液体の基底状態に簡単に落ち着くことはできなくなる．私たちの常温の世界では温度は百分の一 eV 程度のエネルギーに対応するが，このような低温であっても，現実には電子間相互作用の効果が大きくなると，拮抗のためにまだ電子のふるまいはゆらいだままとなる．私たちの日常目にする物質の性質の多様性は，この競合による階層形成の強い影響を受けてわずかな違いが大きな性質の違いを生んだ帰結である．ハバード模型やその拡張は非常に単純化された模型であるが，この階層形成とゆらぎを記述できる．しかし，簡単化にもかかわらず，1 次元系のような特殊な場合を別にすると，ハバード模型の厳密な解は求められていない．

もう一つよく研究されている理論模型にスピン 1/2 の**量子ハイゼンベルグ模型**がある[1]．この模型のハミルトニアンは

$$\mathcal{H} = \sum_{\langle ij \rangle} J_{ij} \boldsymbol{\sigma}_i \cdot \boldsymbol{\sigma}_j \tag{7}$$

で定義され，電子のスピンが絶縁体中で示す磁気的な秩序を理解することに役立っている．簡単のため，相互作用の範囲である $\langle ij \rangle$ についての和を最近接格子点対に限って考え，$J_{i,j} \equiv J$ としよう．ここで $\boldsymbol{\sigma}_i$ はパウリスピンであり，

$$\sigma_i^x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_i^y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix},$$

$$\sigma_i^z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

で定義される．この模型は内積 $\boldsymbol{\sigma}_i \cdot \boldsymbol{\sigma}_j$ のうち，$\sigma_i^z \sigma_j^z$ の項だけを取り出せば，イジング模型となり古典的に理解できる．スピンの x, y 成分間の相互作用が加わることによって，上記のパウリスピンが互いに交換しない効果が生じ，量子力学的なゆらぎが生まれる．実際最近接ボンドが正 $J > 0$ で，正方格子や立方格子のような系では，古典的なイジング模型の基底状態はスピンが隣同士互いに反対向きに並ぶ**反強磁性秩序**が生じ，自発的に対称性の破れた相が実現する．例えば立方格子上のハイゼンベルク模型では J/k_B と同程度の温度で反強磁性転移が起きることが知られている．

ハバード模型で電子濃度がハーフフィリング（$\sum_\sigma \langle n_{i,\sigma} \rangle = 1$）のときに t_{ij}/U が小さいとして，2 次摂動を行なうとハイゼンベルク模型が得られる．このとき J_{ij} は t_{ij}^2/U で与えられる．強相関電子系では t_{ij}/U が 1/10 より小さくなることは多く，この場合，ハバード模型の持つ特徴的なエネルギースケールである U や t_{ij} よりも桁違い

に小さな J というエネルギースケールによって系の性質が支配される．つまりハイゼンベルク模型はハバード模型よりもさらに一段エネルギーの低い階層の有効模型である．これは上で述べた階層性の表れのもう一つの例である．さらに格子構造が三角格子のように**幾何学的なフラストレーション**のある構造になっていると，反強磁性のような単純な秩序が J/k_B の温度スケールで生じることはなくなり，さらに低い温度まで基底状態への行く末が決まらないゆらいだ状態が持続し，新しい階層が現れる．このようにエネルギー階層構造は**量子力学的なゆらぎと競合**，フラストレーション効果などを介して，もとの特徴的なエネルギーで決まる温度よりも何桁も低い温度にまで及び，多段階で多様性に富んだものになり得るわけである．

4. 階層の橋渡し

物の性質の多様性が競合の結果生まれる階層構造に由来することがわかると，もとのハミルトニアン (2) を書き付けただけでは，この多様性について何もわからないことが納得できる．(1) をいきなり解くことができない以上，階層構造から生じる結末を予想するには，異なる階層構造の間をつないで，よりエネルギーの高い階層から低い階層がどのように生まれてくるかの機構を解明することが本質的に重要となる．

エネルギー階層の低い段階で妥当であろうと予想されるハバード模型やハイゼンベルク模型はそれ以下のエネルギースケールに起きる現象や物理を理解する上の出発点になり得る．実際，低エネルギーの有効模型としてハバード模型やハイゼンベルク模型は40年以上前から直感的な考察から提案され，研究されてきた[1~4]．それ以来，今に至るまで，採用すべき模型を直感的に仮定し，模型のパラメタを帯磁率などの実験結果から予想して外から与えるというやり方をとることは多い．

しかし現実の物質や現象に対して，どの模型を採用すべきか，また妥当な模型は決まったとしてもどのようなパラメタ値を使うべきなのかを任意性なく決めなければ，現実物質の性質の予測はできない．真に新しい概念を必要とする未知の現象を理解する上で，現実の自然と机上の空論を区別するには，現実の自然は異なる階層をどうつないでいるか？ 低いエネルギー階層を支配する模型や法則は何か？ を解き明かすことがどうしても必要になる．このための手法として**ダウンフォールディング**と呼ばれる手法や**繰り込み群**的な手法がようやく最近になって活発に研究されている．階層構造も考慮し，互いの相互作用によるゆらぎを取り入れながら，現実物質の物性を解明したり予測する研究は物性物理学の大きな潮流となってきている．

このような階層性を取り込むためには，大局的なエネルギースケールでの電子状態をまず求めておく必要がある．**大局的な構造**はエネルギースケールが大きく，時間的には短時間の現象，空間的には短距離の構造を決め，原子分子のミクロな性質の出発点によって直接に決定され，階層形成の影響を受けない．このような大局的な（あるいは高エネルギーの）情報を得るための方法として，**第一原理計算**の手法がある．実験結果や任意性のあるパラメタを利用せずに（これを**非経験的**（*ab intio*）という），用いる近似をできる限り汎用性の高いものにとどめ，コンピュータを駆使しながら，多彩な物性と現象の機構を統一的，非経験的に理解することをめざす計算手法である．この第一原理的な手法の中で，**密度汎関数法**[5,6]は標準的な電子状態計算法である．局所密度近似[6]や一般化勾配近似（GGA）を用いて，半導体など電子相関の弱い広範な物質群の性質を大変良く予測できる．しかし電子間のクーロン相互作用の効果の大きな強相関物質では，この手法は定量的な不十分さだけでなく，絶縁体を金属と予測するなどの定性的に誤った結論に導く．最も有名な例は，La_2CuO_4 など一群の銅酸化物高温超伝導体の母物質である．La_2CuO_4 はギャップが 2eV もあるモット絶縁体だが，密度汎関数法を適用すると金属という結果しか得られない[7,8]．密度汎関数法を用いて解くときに採用する近似が平均場近似的な性格を持つために，電子

間の強い相互作用によって生じるゆらぎを取り入れられないためである．これはフェルミレベルに近い低エネルギー部分の電子構造が，大局的なエネルギー構造からいきなり低エネルギーまでのふるまいを求める計算手法では正しく表わせず，低エネルギー部分に現れる階層構造に適した取り扱いが必要であることを示している．

低エネルギーの有効模型を第一原理的に導き出すには，ウィルソンの**繰り込み群**の精神に基づく高エネルギー自由度の消去と低エネルギー自由度への繰り込み効果を求める方法がある[9~11]．ある完全規格直交系を用いて，全電子系のハミルトニアンを

$$\mathcal{H}[c^\dagger, c] = \sum_{\mu,\nu} h_K(\mu,\nu) c_\mu^\dagger c_\nu + \sum_{\mu,\mu',\nu,\nu'} h_V(\mu,\mu',\nu,\nu') c_\mu^\dagger c_{\mu'}^\dagger c_\nu c_{\nu'} \tag{8}$$

と表わそう．$c^\dagger(c)$ は電子の生成（消滅）演算子であり，μ,ν などはバンド番号を表わす．右辺第一項は化学ポテンシャルも含む運動エネルギー，第二項はクーロン相互作用のこの基底での表現である．

系の分配関数 $Z = \mathrm{Tr}\exp[-\mathcal{S}]$ は系の作用

$$\mathcal{S}[c^\dagger, c] = \int dx c^\dagger \partial_\tau c + \mathcal{H}[c^\dagger, c] \tag{9}$$

から与えられる．τ は虚時間であり，c や $c^\dagger$ は x に依存する．x は座標 $\boldsymbol{r}$，スピン σ および虚時間 τ を総称する変数である．バンド μ のうちエネルギーが E_F から離れたもの（**高エネルギー自由度**）を H，有効模型に残す E_F 近傍の自由度を L という添字で表す．このとき，形式的に Z の状態和を

$$Z = \mathrm{Tr}_L \mathrm{Tr}_H \exp[-\mathcal{S}] \tag{10}$$

と高エネルギーと低エネルギーの自由度に分ける．高エネルギー自由度を消去した（すなわち部分トレース和を取った）後に得られる**低エネルギー自由度**の作用は，

$$\mathcal{S}_L[c_L^\dagger, c_L] = -\log \mathrm{Tr}_H \exp[-\mathcal{S}] \tag{11}$$

と与えられる．形式的に $\mathcal{H}_L$ を

$$\mathcal{H}_L[c_L^\dagger, c_L] = \mathcal{S}_L - \int dx_L c_L^\dagger \partial_\tau c_L \tag{12}$$

と定義する．この $\mathcal{H}_L$ がハミルトニアンとして意味を持つには，虚時間 τ への依存性（遅延効果）がないことが必要であるが，このとき有効ハミルトニアン $\mathcal{H}_L$ は一般に

$$\mathcal{H}_L = \sum_{\mu,\nu} h_{LK}(\mu,\nu) c_\mu^\dagger c_\nu + \sum_{\mu.\mu',\nu,\nu'} h_{LV}(\mu,\mu',\nu,\nu') c_\mu^\dagger c_{\mu'}^\dagger c_\nu c_{\nu'} + \cdots \tag{13}$$

と展開できる．ただし，c や $c^\dagger$ はもはや L の自由度しか含まない．τ 依存性が顕著な場合は，作用 $\mathcal{S}_L$ のまま扱う必要がある．

やや抽象的な書き方になったので，このやり方の妥当性を吟味するために，より物理的な描像に立って考察してみる[9~11]．低エネルギー自由度の電子には，高エネルギー部分の電子の自由度を消去するときに，高エネルギー部分との相互作用から繰り込みが生じ，その効果が運動エネルギー項と相互作用項が衣を着るという形で現れる．実際，高エネルギー自由度の分極との相互作用は，低エネルギー電子間のクーロン相互作用を遮蔽し，裸の相互作用を減少させる（**遮蔽クーロン相互作用**）．また低エネルギー電子の有効質量は高エネルギー電子分極の衣を着て増大するが，これは低エネルギー電子の**自己エネルギー効果**として現れ，運動エネルギー項（バンド分散項）を変える．これらが (13) 式の $h_{LK}(\mu,\nu)$ や $h_{LV}(\mu,\mu',\nu,\nu',\tau)$ の形を決めることになる．

E_F 近傍の有効模型が求められた後，最後の課題はこの有効模型をどうやって信頼できる方法で解くかに帰着される．この目的のために最近多くの**低エネルギーソルバー**が開発されている．ハバード模型のような格子模型を格子上の量子多体問題として，忠実に解く方法として，$\mathcal{H}_L$ の**厳密対角化**，**補助場量子モンテカルロ法**，**経路積分繰り込み群法**[12~14]，**変分モンテカルロ法**[15]などが試みられている．また平均場近似の枠内だが，**ゆらぎ交換**

(**FLEX**) 近似[16]もよく用いられる．さらに空間次元無限大で厳密になる方法 (**動的平均場近似**[17~19]) を出発点にして，現実の3次元や2次元の系にアプローチする計算手法も発展している．動的平均場近似には空間ゆらぎを無視するという欠点があるが，最近はこの欠点を克服すべく，局所近似をクラスターに拡張した，クラスター型動的平均場近似の種々な方法が試みられている[19~21]．

5. 実験と理論

階層構造のレベルを意識しながら，それぞれのレベルでの有効模型を導出してこの模型を解くか，あるいはさらに低エネルギーの階層構造の有効模型へと橋渡ししてゆくことによって，物性物理学の扱う世界の多様性が理解されるようになることを明らかにしてきた．こうして現実的な理論が構成されても，本当にその結果が現実の自然を記述するものになっているかどうかは，やはり**実験結果との対比，検証**を経る必要がある．階層間が正しく橋渡しされているかどうかを検証するには，そのエネルギーレベルや長さスケールの観察に適した実験手法との突合せが必要である．例えば数十eVから数eVという大きなエネルギースケールでの大局的な電子構造（バンド構造）が正しいかどうかは，**光電子分光**や**光学スペクトル**といった実験手段によって，1電子グリーン関数や光学電気伝導度が明らかにされれば判定できる．一方常温程度やそれ以下の低エネルギーでの電子構造は，**比熱**や**帯磁率**のような**熱力学測定**や，その温度依存性が検証に有効である．また**中性子散乱**や**核磁気共鳴**のような実験手段によって，低エネルギーでの磁気的な性質や格子振動の特性などの詳細な情報をつき合わせることができる．最終的には多段階の階層形成を経た現実物質の低エネルギー有効模型を低エネルギーソルバーによって解いた予測と，対象とする物質の物性，磁気的性質，金属か絶縁体か超伝導かという伝導性，誘電的性質などが一致するかどうかによって，対象とする物質の性質が微視的に理解されたかどうかがわかることになる．エネルギーや長さスケールにして10桁以上に亘るような多段階の階層に応じて，多様な実験手段と測定法が発展し，各段階の理論予測を検証できることが，物性物理学を定量的な予測の可能な精密科学にすることを保証し，また想像もできないような新奇な現象や機構を理解することを可能にしている．このように現実物質の階層形成を経た有効模型を導出し，これを解き，実験と比較しながら，物性を予測検証する研究の潮流は大きく広がりつつある[22]．

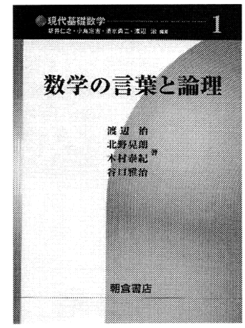
参考文献

1) W. Heisenberg: *Z. Phys.* **49** (1928) 619.
2) P.W. Anderson: *Phys. Rev.* **115** (1959) 2.
3) J. Kanamori: *Prog. Theor. Phys.* **30** (1963) 275.
4) J. Hubbard: *Proc. Roy. Soc. London* A **276** (1963) 238.
5) P. Hohenberg and W. Kohn: *Phys. Rev.* **136** (1964) B864.
6) W. Kohn and L.J. Sham: *Phys. Rev.* **140** (1965) A.1133.
7) L.F. Mattheiss: *Phys. Rev. Lett.* **58** (1987) 1028.
8) M.S. Hybertsen, M. Schlüter and N.E. Christensen: *Phys. Rev.* B **39** (1989) 9028.
9) F. Aryasetiawan *et al.*: *Phys. Rev.* B **70** (2004) 195104.
10) I.V. Solovyev *et al.*: *Phys. Rev.* B **71** (2005) 045103.
11) I.V. Solovyev: *J. Phys. Condens. Matter* **20** (2008) 293201.
12) T. Kashima and M. Imada: *J. Phys. Soc. Jpn.* **69** (2000) 2723; *ibid* **70** (2001) 2287.
13) T. Mizusaki *et al.*: *Phys. Rev.* B **69** (2004) 125110.
14) Y. Imai, I.V. Solovyev and M. Imada: *Phys. Rev. Lett.* **95** (2005) 176405; Y. Otsuka *et al.*: *J. Phys. Soc. Jpn.* **75** (2006) 124707.
15) D. Tahara and M. Imada: *J. Phys. Soc. Jpn.* **77** (2008) 114701 およびその参考文献.
16) N.E. Bickers and D.J. Scalapino: *Ann. Phys. (NY)* **193** (1989) 206.
17) W. Metzner and D. Vollhardt: *Phys. Rev. Lett.* **62** (1989) 324.
18) A. Georges *et al.*: *Rev. Mod. Phys.* **68** (1996) 13.
19) G. Kotliar *et al.*: *Rev. Mod. Phys.* **78** (2006) 865.
20) T. Maier *et al.*: *Rev. Mod. Phys.* **77** (2006) 1027.
21) M. Potthoff, M. Aichhorn and C. Dahnken: *Phys. Rev. Lett.* **91** (2003) 206402.
22) 今田正俊，常行真司：日本物理学会誌，**64** (2009) 283.

（いまだ・まさとし，東京大学大学院工学系研究科）

数学の言葉と論理

渡辺治・北野晃朗・木村泰紀・谷口雅治共著，A5 判，228 頁，本体 3300 円，朝倉書店



『現代基礎数学』というシリーズのトップバッターに相応しい内容の本である．物事の根本的な原理を理解するところから始めて，論理的な思考によって新しい構築物をその上に積み上げげていく能力は，理工系の大学生にとって必要不可欠の基本的素養の一つであるが，それが現在の大学生には欠けている（高校までの課程において，そういう訓練を受けていない）と思う．特に，数学とは公式に従って計算をする技術だと思い込んで大学に入って来た学生は，数学の言葉をきちんと身に付けていないので，式の計算はできても，論証が必要なところを論理的にきちんと説明することができない．このような新入学生に数学における言葉とは何かを一から説き，その言葉の使い方（数学的論法）を徹底的に身につけさせることを意図した意欲的な本である．

本書は 4 章から構成されている．

第 1 章は「命題論理」から始まるが，論理演算の意味と論理式に関する法則を，基本的なものから順を追って実に丁寧に説明している．新しい法則が登場するたびに，それが成り立つことを，それより前に示した法則を使って命題論理式の同値変形を行うことで示してみせる．16 もの例題を用い，命題論理だけに 13 頁半も充てていることから，入門者を意識した本書の性格が最初から色濃く現れている．続く「述語論理」の節は，述語とは何かということと全称記号や存在記号の意味とそれらについてのごく基本的なことについて述べるにとどめ，それに続く「証明」という節で，述語論理の命題を例にして数学における証明とはどういうものであるかを述べている．第 1 章の最後の節では「集合」に関する諸記法と諸法則を扱っているが，諸法則が成り立つことを述語論理式を使った形式的な手法で「証明」してみせる．たいていの数学入門書では，こういった集合に関する諸法則が成り立つことは当たり前のこととして証明などはしないのが普通なので，人によってはややくどく感じるかもしれないが，これは「数学における証明の方法」について述べている前節の応用例でもあり，また，第 2 章以降に登場する各種定理の証明法につながる役割も果たしている．

第 2 章の前半は「写像（関数）」を扱っている．本書では写像 $f : X \to Y$ をそのグラフ $G(f) := \{(x, f(x)) \mid x \in X\}$ と同一視し，写像についての諸性質の証明も（写像の）グラフに関する述語論理式を使った論理計算で示してみせる．「濃度」について述べるためには写像の全単射の概念が必要なので，第 2 章の後半で「無限」と「濃度」が扱われる．入門者に無限集合の濃度について理解させるのはなかなか難しいことであるが，本章ではやや高度な話題としてカントール集合の濃度やベルンシュタインの定理，さらには選択公理も取り上げており，単なる入門書以上の深みを与えている．

第 3 章では写像の一般化として「二項関係」を扱っている．ここでも，写像のグラフの一般化である二項関係の「グラフ」（＝順序対の集合）を用いて二項関係に関する諸性質を証明する．この章で「順序」と「同値関係」が導入されるので，それを用いて整数を自然数の順序対の上の同値関係として，また，実数を有理数のコーシー列の上の同値関係として導入し，実数に関する性質のいくつかをその定義に従って証明する．こういった「数の構成」に関する話題は数学科においては大学初年度に学ぶべき基本的なことであるが，理工系一般の大学生を対象としていると思われる本書のような入門書としては，これもやや高度なトピックである（こういった高度のトピックの部分をおもしろく読めるかどうかが，本書の内容を真に理解して数学の言葉が身に付いたかどうかを測る目安といえるかもしれない）．

最後の第 4 章は，第 3 章までで習得した数学の基礎（様々の概念，記法，論理の進め方）を駆使して数学的論法を展開するテクニックや活用例を，情報処理の分野からの例を引いて示している．まず，数学的論法として基本的な対偶や背理法を用いた証明法を取り上げ，次いで，離散量を扱うことが多い情報数学の分野では重要なテクニックである帰納法による証明や帰納的（再帰的）な定義方法を取り上げ，最後に，「形式言語」を題材として数学の言葉を使ってみせる．

理工系大学生の数学基礎力を入学後に鍛え直すことが必要となっている昨今，本書はお勧めの一冊である．

守屋　悦朗（早稲田大学教育・総合科学学術院）

「数理科学」は語る

30年前から現代へのメッセージ

三宅 芳雄

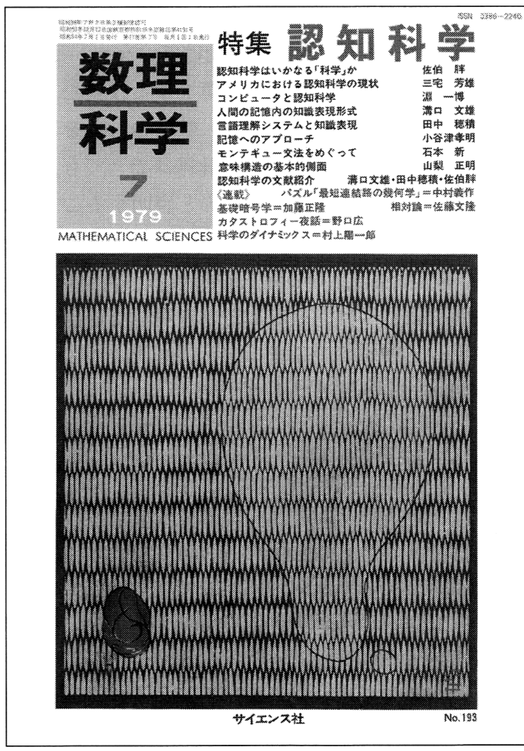
1979年7月号

認知科学が一つの学問分野として誕生したのはおよそ30年ほど前のことだ．ちょうど30年前の1979年の夏には，認知科学の代表的な国際学会であるCognitive Science Societyの第1回の大会が米国のSan Diegoで開かれている．本誌は同年の7月号でいち早く認知科学を特集し，この分野の動向を多角的に紹介しており，認知科学創設のころの事情がよく分かる．

さて，認知科学の誕生の当初から現在に至るまでの間に，どのような進展があったのだろうか．認知機能を大脳に関係づけて研究する脳科学の研究は，認知科学誕生の当初から認知科学の重要な研究領域として認識されていたが，その後の研究の数の飛躍的な増大は誰しもが認めるところだろう．しかし，筆者はこの30年の間の目立たないが重要な進展として，人の認知過程の予期を超えた複雑さへの認識の深まりを挙げたい．

もちろん，認知過程の本質が表象の複雑な相互作用にあるという捉え方は認知科学の一つの出発点だ．実際，人々の日常の生活の中の一見単純な発言さえも，その背後には直接見えない多くの表象が複雑に関わっている．「今日は暖かいよ．」という発言は，それが外気の温度という客観的な事実を表しているだけでなく，状況によって，「窓を開けて．」や，「外に遊びに行こうよ．」というようにそこから無数の意味が派生する．その背後に，客観的な環境だけでなく文化的な環境との相互作用も含めた複雑で膨大な表象から構成される認知過程が存在するのに較べれば，発言自体は氷山の一角として現れたものに過ぎない．

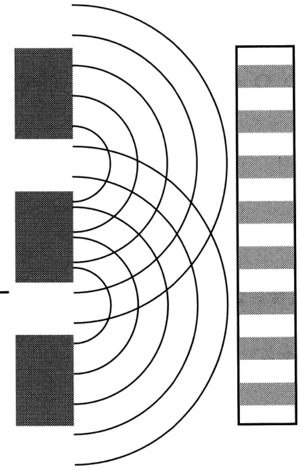
このような複雑な認知過程の解明が如何に困難であったとしても，それを達成したいということが認知科学という新たな研究分野を成立させる一つの動機であったと思う．その目標の達成のためには，研究の方法論や理論的な枠組みの模索といった新たなアプローチが必要であり，それを既存の学問分野の垣根の中で，陰に陽に存在する伝統との軋轢の中で行うよりは，学問分野の垣根を作らずに，対象の解明という一点で構成した学問分野の中で自由闊達に行いたいということが認知科学の誕生の原点にあった．



実際，この30年間に認知科学研究の様々なアプローチは単純なものの見方を克服し，認知過程を構成する複雑な相互作用の実態を明らかにしてきた．自分を含めた人の認知過程の実態を複雑なものだと捉えること自体，実は難しいことだ．人が「分かること」を求めすぎて，対象の実態から離れた奇妙な分かり方に陥り，そこから回復する複雑な認知過程の実態についても認知科学は明らかにしてきている．現実の複雑な認知過程を正しく理解し学ぶための文化的装置や環境を構成することも現在の認知科学の大きな課題であると思う．

（みやけ・よしお，中京大学情報理工学部）

目で見て学ぶ量子力学



第11回 実験でひもとく量子の不思議

電子線ホログラフィー

光の波面として再現される電子の波面

外村　彰

11.1 はじめに

ホログラフィーは，電子顕微鏡の分解能の壁を破るための2段階の結像法として1949年にD. ガボールによって考案された．

まず，電子線を使って物体のホログラムをフィルムに撮影する．ホログラムとは，“物体で散乱された波”に参照波[傍注1]を重ねて得られる干渉パターンである．このホログラム・フィルムに，光の参照波を当てると，光は干渉縞によって回折を起こし，回折波の中に電子の波面が光で再現される．電子線と光の波長は10万倍も違うが，再生された光の波面は，波長を単位として見れば電子の波面と同じである．あたかも，そこに物体が存在するかのように3次元的に結像される．レンズも使わずに像を結ぶのは不思議だが，波としての最も基本的な性質“干渉と回折”を巧みに利用して結像が行われる．

［傍注1］ 平面波や球面波などの波面の分かっている波のことを参照波と言う．波面の分かっていない物体波に重ねて干渉パターンを観測すると，物体波の波面が分かる．

ガボールは，電子顕微鏡の分解能を制約していた電子レンズの収差を，光学再生段階で光学的に補正して収差のない結像系の実現を狙った．可能性は，それだけに止まらない．光学技術を駆使できるので，電子顕微鏡の中では不可能だった様々な可能性が拓かれる．

こんなうまい話がこれまでなぜ実現されていなかったのか？ 発明当時，光にも電子線にも，干渉性のよい波が存在しなかった．1960年レーザー光の出現によって光ホログラフィーが実用化され，1979年干渉性の良い電界放出電子線の登場によって，電子線ホログラフィーが漸く実用レベルに至った．

11.2 顕微鏡で見える限界

1878年，E. アッベは，どんなに精巧な顕微鏡を作っても，光を使う限り，波長以下の分解能は得られないことを証明した．しかし，光学顕微鏡でも見えな

いもっと小さな世界があることは，疑いの余地はなかった．1923年，L.ド・ブロイによって，電子が光の10万分の1もの短い波長を持つ波であるという仮説を知ったE.ルスカは，人類が目にしたことのない病原菌の姿を追って，“電子を使った顕微鏡”の開発に意欲を燃やした．1938年には，シーメンスと共同開発した分解能100Åの電子顕微鏡を使って，バクテリオファージ[傍注2]の姿を初めて捉えたときには，世界中に衝撃が走った．分解能は，その後，急激に向上し，1960年代には，数Åの結晶格子の像までが観察できるまでになった．

しかし，分解能は，波長の100倍の1Åで頭打ちとなる．電子レンズの収差を取り除くことができないためであった[傍注3]．

問題になる収差には，2つある．一つは“色収差”．電子の波長によって焦点距離が変わる．もう一つは“球面収差”．レンズの中心部と周辺部を通る電子とで焦点距離に差が現れる．光学顕微鏡では，屈折率の異なるガラスで作った凸レンズと凹レンズを組み合わせて，これらの収差を補償することができる．しかし，電子レンズ，正確に言うと軸対称な磁界型レンズでは，凹レンズが作れないため，光学顕微鏡のようにレンズの組合せで収差を打ち消すことができない．

[傍注2] 細菌を食べるウィルス.「ファージ」は食べるという意味.

[傍注3] 通常の電子顕微鏡で使われている磁界型電子レンズでは，軸対称性を保ったままでは凹レンズを作ることができない．このため，大きな収差が伴ない，電子顕微鏡の分解能や機能が制約される．多重極レンズを使えば，収差を除けることは分かっていたが，レンズ作製の機械精度が追いつかないため，諦められていた．1989年に先端技術の導入によって新たな可能性が拓け注目されている．

11.3 ガボールの夢—ホログラフィー—

この問題に思いもよらぬ解答を与えたのが，ハンガリー生まれのイギリス人ガボールであった．ガボールは，ベルリン工科大学でルスカの先輩だった．電子レンズの収差を小さくするために，光軸の曲がった光学系で収差補正ができるという発明もしている．しかし，機械的精度のために実現には程遠いものであった．

無収差電子レンズを実現して，1個の原子を見ることを夢見て，5年もの間考えを巡らせてきたガボールは，1947年，巧妙なアイディアを思いつく．「すべての情報を含んだ電子線の像（ホログラム）を記録し，それを光学的に補正したら良いのでは？」．ガボールは，このアイディアを光の実験で確かめた．ガボールが行った光のモデル実験では，わずか200本の干渉縞しか得られない高圧水銀灯[傍注4]を使い，最も高い感度のフィルムに数分間の露出時間が必要であった．我々が1968年にようやく電子線ホログラフィーの可能性を示したときと不思議なほど数値が一致している[1]．ポイント・フィラメントを使っても300本の電子線の干渉縞を得るのがやっとだったし，露出時間は数分から数十分を必要とした．

[傍注4] 水銀蒸気を放電させるランプ．高圧水銀灯はその一種．ガボールは高圧水銀灯から出てくる“線スペクトル”の光（波長の一定な光）を3μmという小さなピンホールを通して，光源として使ってホログラムを作った．

電子線ホログラフィーの実験はガボールやAEI社のM.E.ヘインやT.マルベイ[2]，そして東北大学の日比忠俊[3]によって行われたが，干渉性の良い電子線もなく，電子顕微鏡の安定性にも乏しく，さらに，像再生用のレーザー光すらなかった当時としては，それ以上の進展は見られなかった．

レーザーの発明によって，ホログラフィーは1963年に光の領域で，突然，劇的によみがえった．次節で述べる2光束ホログラム・フィルムから，鮮やかな立体像が再生された．「これは，レーザーによって10,000本もの干渉縞がホログラムに記録できるようになったからである」（ガボール）．以来，レーザー・

ホログラフィーは爆発的発展を遂げた．

11.4 電子線ホログラフィーの実現

電子線ホログラフィーの可能性は，1968 年に実証された[1]．日比忠俊が開発した輝度の高いポイント・フィラメントを使い，しかも干渉条件の最も緩いガボール型フラウンホーファー方式を採用して実験が行われた．

11.4.1 ガボール型ホログラフィー

ホログラムは，物体波に参照波を重ねて作成する．ガボール型（インライン方式）傍注 5 と呼ばれる方式では，小さな物体の周囲を通った平面波を参照波とする（図 11.1 (a)）．実際には干渉縞の間隔が狭いので，電子顕微鏡の電子レンズで拡大してフィルムに記録しホログラムとする．いわば，平行照射をし，かつピントを大幅にぼかした電子顕微鏡像である．このホログラム・フィルムに平行なレーザー光を当てると，物体の像が浮き上がってくる（図 11.1 (b)）．

ところが，ホログラフィーで再生される像は 1 つではない．ホログラムの反対側にもう 1 つの像が生じてしまう．これら 2 つの像は，振幅が互いに複素共役なので "共役像" と呼ばれ，位相分布が逆符号になる．このため，再生像を観察しようとしても共役像が重なってしまうので，像観察の障害になる傍注 6．一方の像を観察しようとすると，他方のピンボケ像が重なり，ホログラフィーを用いた結像法の大問題となっていた．事実，ガボールの提案に引き続いて行われたヘインとマルベイ[2]や日比忠俊[3]の実験では，共役像のピンボケ像が重なって再生像が乱されていた．

筆者らは，光ホログラフィーで B.J. トンプソンが用いた条件を電子線ホログラフィーに適用して，共役像の影響のない鮮明な再生像を得ることができた[1]．この方式では，小さな物体のフラウンホーファー回折領域傍注 7 でホログラムを作成する．再生像と共役像は十分に離れた位置に結像されるので，一方の像を

(a)

(b)

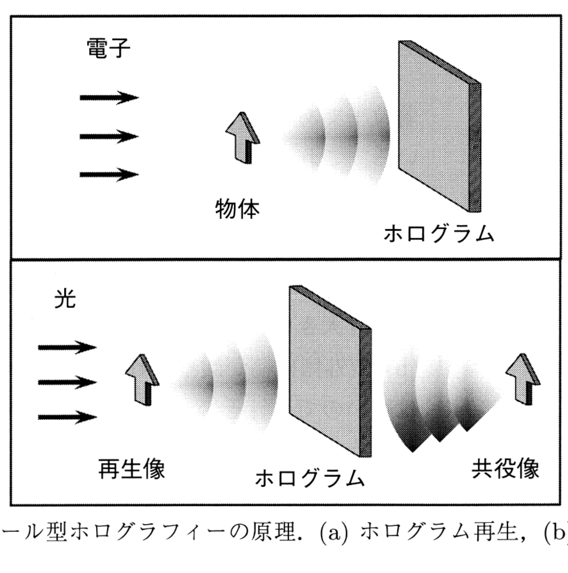
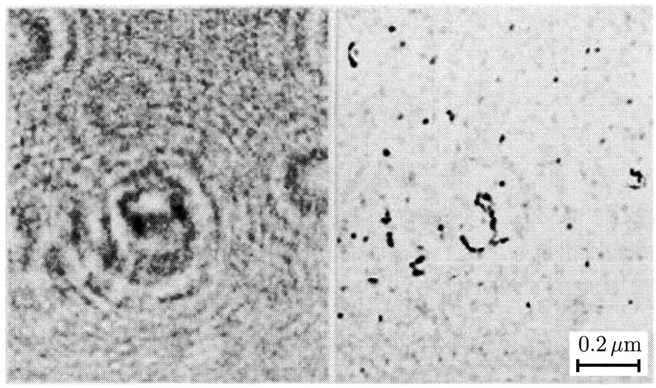


図 11.1　ガボール型ホログラフィーの原理．(a) ホログラム再生，(b) 像再生．

[傍注 5]　参照波を物体波と同じ方向から与える方式のホログラフィーをガボール型あるいはインライン方式と言う．小さな物体の周辺を通った波を参照波として使えるので，波の干渉性の条件が緩くなる．

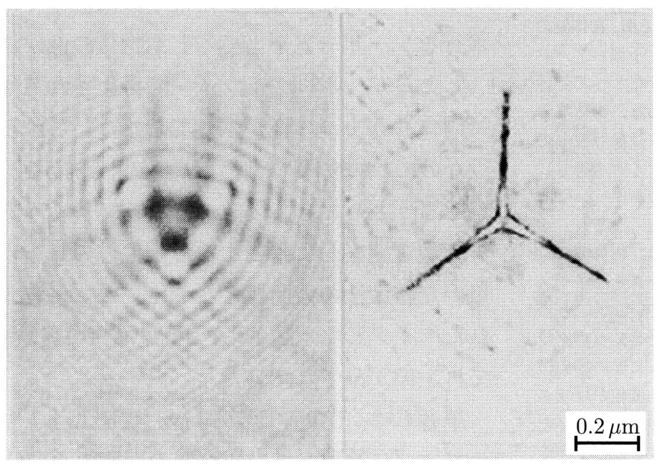
[傍注 6]　共役像が生じる理由は，つまる所，物体波の位相情報を，干渉パターンの形で強度分布として記録するからである．物体波の位相（厳密には参照波との位相差）がマイナス符号になっても干渉パターンは同じままである．つまり，ホログラムには，物体波の位相情報のプラス・マイナスは記録できていないことになる．このため，ホログラム・フィルムに光の参照波を当てると，位相がプラスとマイナスの符号をもった 2 つの波が生じてしまうことになる．

[傍注 7]　物体の後方で回折パターンを観察すると，物体の縁に沿ってフレネル縞が生じる．縁からフレネル縞までの距離は，波長を λ，物体から回折パターンまでの距離を z とすると $\sqrt{\lambda z}$ で与えられる．物体の大きさ a が $\sqrt{\lambda z}$ よりもずっと小さくなる条件が，フラウンホーファ回折の条件である．あるいは z が $\frac{a^2}{\lambda}$ より大きくなる条件と言ってもよい．つまり物体から十分離れた位置で物体のピンボケ像（回折パターン）を観察することになるので，物体の形状は全く分からないほど，ボケてしまう．



(a) (b)

図 11.2 金の蒸着粒子の再生. (a) ホログラム, (b) 再生像.



(a) (b)

図 11.3 酸化亜鉛の煙粒子の再生. (a) ホログラム, (b) 再生像.

観察したときに, 他の像の影響は一様なバックグラウンドにしかならない.

このような条件で得られた結果を図 11.2 に示す. 試料は直径 100 Å の金の蒸着粒子である. ホログラム (a) では, 粒子の形状が想像もつかないほどボケている. これが, フラウンホーファー回折の特徴である. このホログラム・フィルムに光を当てると小さな粒子が再生される[傍注8] (図 11.2 (b)). 何故, 波紋のようなホログラムから微粒子の像が再生されるか, 不思議である.

図 11.3 は, 亜鉛を燃やしたときに生じる酸化亜鉛の煙の粒子である. 物体はかなり大きいので, フラウンホーファーの条件を満たしていないため, 再生像 (b) の外側に縞が観察される. これが共役像のピンボケ像である. しかし, 針は細いので, 針そのものはきれいに再生されている.

こうして, 電子線でもホログラフィーが可能であることが実証された. しかし, 電子線の干渉性不足のために, 再生像の分解能は, 数十Å にとどまり電子顕微鏡の分解能にすら及ばないという結果に終わった.

[傍注8] 十分に小さな物体 (点物体) のフラウンホーファー回折像は, ゾーンプレートになる. ゾーンプレートは同心円状の干渉縞からできているが, その間隔は中心から遠ざかるにつれて狭くなる. このゾーンプレートに平行光を当てると, 同心円状の光が透過するが, ゾーンプレートからある距離離れた 1 点で焦点を結ぶ. すべての光が, ここで同位相で重なり合って, 強度を強め合うからである.

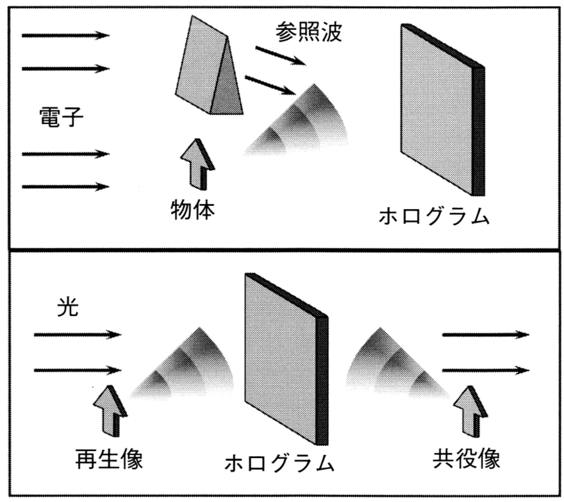


図 11.4　二光束ホログラフィーの原理．(a) ホログラム作成，(b) 像再生．

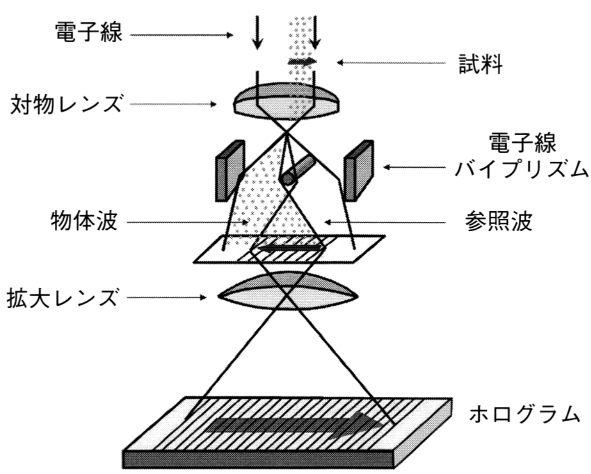


図 11.5　電子顕微鏡の中でのホログラム作成法．

11.4.2 二光束ホログラフィー

物体の大きさに制約のない二光束の電子線ホログラフィー（図 11.4）が，実用化されるようになったのは，1979 年に干渉性の良い電界放出電子線が開発されてからのことである．この方式では，物体波が進む方向とは異なった方向から参照波を重ねてホログラムを作る．再生像と共役像は，異なった方向に進む 2 つの回折波の中に再生されるので，両者を独立に観察できる．このため，物体の大きさにも制約がない．その代わり，ガボール型に較べてホログラムを作るときの電子線の干渉性の条件が厳しくなる．

実際のホログラム作成法を図 11.5 に示す．電子線バイプリズムの両側に物体波と参照波を通して，後方で重ね合わせてホログラムとする．ホログラムの実例を図 11.6 に示す．マグネシウムを燃やしたときに生じる煙の微粒子 MgO のホログラム (a) と拡大写真 (b) を示す．ホログラムは縦方向の細かい干渉縞から成っていることがわかる．物体を透過したときに生じる位相変化は，干渉

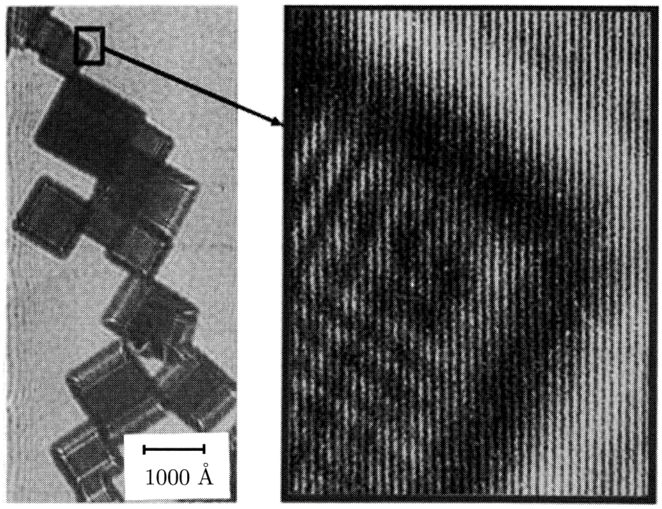


図 11.6　MgO 微粒子のホログラムの実例．(a) ホログラム，(b) 拡大像．

縞のずれとして記録される．

電界放出電子線と二光束ホログラフィーを用いることによって，再生像は電子顕微鏡とほぼ同等の分解能に達するまでに至った．ガボールの狙いであった分解能の壁を破るには，再生像をさらに収差補正をする必要がある[4]．

そこで，実際の高分解能ホログラフィーの実例を紹介し，少しややこしくなるかも知れないが，ホログラムにはどんな干渉縞が記録され，ホログラムからどんな波面が再生されるか，さらに収差補正をするとどうなるのかを直感的に考えてみよう．

11.4.3 高分解能ホログラム

結晶性微粒子を高い倍率で観察すると，いやが上にも球面収差の影響が目につく．微粒子に当たった電子線が，透過波と 2 つの回折波に分かれる場合を考える．つまり，物体波は，これら 3 つの波から成るものとする．透過波は，まっすぐに光軸に沿って進み，レンズの中心部分を通過し，観察面に像を結ぶ（図 11.7 (a)）．一方，ブラッグ反射を起して上下に回折した電子波は，レンズの周辺部分を通って球面収差の影響を受け，焦点距離が短くなる．このため，回折波の作る像は，観察面では透過像と異なった位置に結ばれることになる．

実際の電子顕微鏡写真を見れば理解しやすいと思う．図 11.8 の金の微粒子像の上半分の扇形（おおぎがた）の部分が黒くなっているのは，この部分の結晶面でブラッグ反射を起こした回折波が，レンズの端を通り収差の影響で，左右の別の場所に結像してしまったためである．本来なら，1 点から出た電子線はすべてレンズによって 1 点に集まるはずだが，球面収差のために，回折波が作る像は，100 Å も離れた位置に像を結んでいる．高分解能観察では，いかに球面収差の影響が大きいかが分かると思う．よく見ると，回折波が作る像の内部には縦縞が見える．これは，回折波と透過波との干渉縞である．2.4 Å 間隔の結晶格子の像で，“格子像” と呼ばれている．しかし，粒子の外に結像されているので，格子像とは呼び難い．ホログラフィーの再生段階で凹レンズの逆符号の球面収差を与え

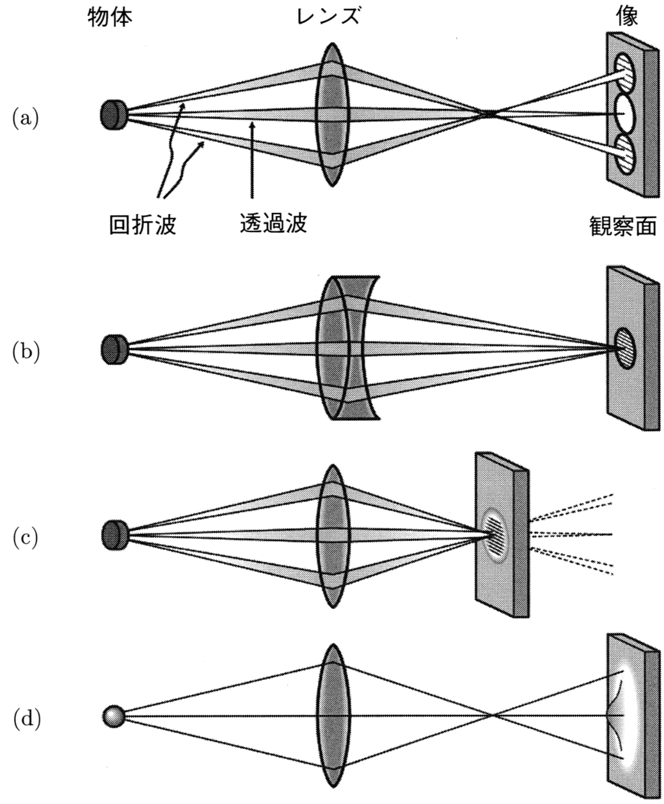


図 11.7　結晶微粒子の観察．(a) 大きな球面収差が存在すると，透過波と回折波の作る像の位置がずれてしまう．(b) 球面収差がない場合には 3 つの像は一致する．(c) 球面収差があってもピントをずらすと 3 つの像の位置を一致させることができる．だが像はボケてしまう．(d) 原子を見ると，大きくボケてしまう．

て収差補正を行うと，2 つの回折波が本来の粒子の位置に戻る．

こうした写真は電子顕微鏡を使った人なら誰しも観察したことがあると思う．しかし，この像はいかにも不自然で，解釈不能である．そこで，ピントをずらすことによって透過波の像と回折波の像が重なり合うようにする（図 11.7 (c)）．こうすれば微粒子の像の中に格子像が見えるようになるが，今度は微粒子像の輪郭がボケてしまう．

この像に参照波を与えて二光束ホログラムを作ってみる．ピントの合った像（図 11.7 (a) や図 11.8）よりも図 11.7 (c) の像のホログラムのほうが，様々な干渉縞が生じていて面白いので，実例を図 11.9 に示す．微粒子から出てくる透過波と 2 つの回折波，それに電子線バイプリズムを使ってこれらに重ねる参照波と，計 4 つの波の干渉縞が生じる．写真を紙面すれすれに矢印の方向からホログラムを見ると，その方向に干渉縞が写っていることが分かる．例えばⒶ方向から見ると，微粒子像の内部に左上から右下に干渉縞が走っている．これは，参照波と回折波との干渉縞である．

ホログラムに光の平面波を照射すると，物体を透過した波だけでなく 2 つの回折波も光の波として再生される．波面は 3 次元的に再生されているので，観

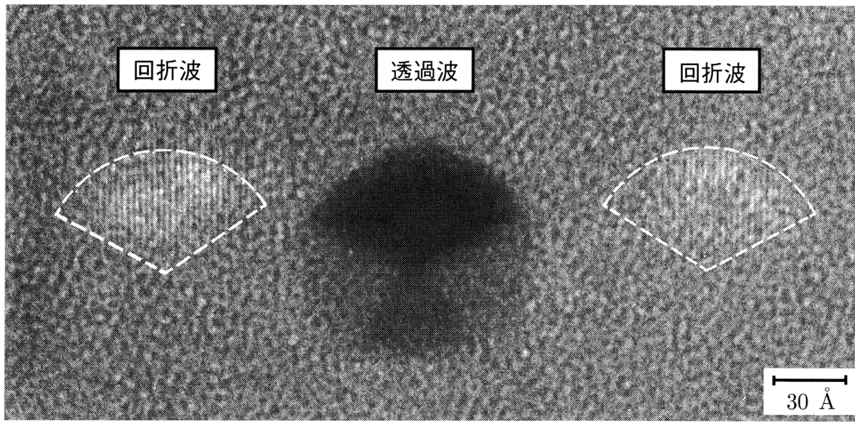


図 11.8　金の微粒子の電子顕微鏡像．レンズの球面収差の影響で，像にピントを合わせると，2 つの回折波は透過像とは異なった位置に像を結ぶ．回折波の作る像の中には，縦縞が見えるが，これは透過波と回折波の干渉縞である．粒子でない所に“格子像”が生じてしまう．通常は，ピントをずらして 2 つの回折波が作る像を透過像に一致させる．

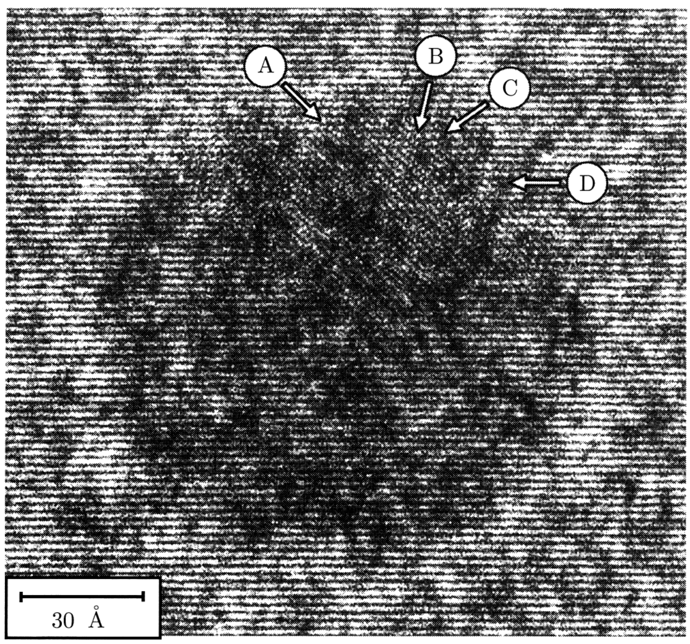


図 11.9　金の微粒子のホログラム．結晶性微粒子の二光束ホログラムには，様々な干渉縞が現れる．紙面を，矢印の方向から，“はす”に見ると，かすかだが干渉縞が見える．Ⓐ: 参照波と回折波の干渉縞，Ⓑ: 2 つの回折波と透過波の 3 つの波の干渉縞，Ⓒ: 参照波ともう 1 つの回折波の干渉縞，Ⓓ: 参照波と透過波の干渉縞．

察面をずらしていくと，結像の様子を追うことができる．例えば，図 11.7 (c) では，回折波は粒子像に重なっているが，像のピントはボケている．図 11.9 のホログラムを遠方から目を細めて見ると，粒子の像は，白いフレネル縞で縁取られていて，ボケていることが分かる．観察面を右にずらしていくと，回折波は次第に微粒子像から離れていって，粒子像にピントの合った位置では，図 11.7 (a)

つまり図 11.8 の像が光学的に得られる.

球面収差の影響は結晶試料に限らない. 1 個の原子を観察しようとしたときにも, 事情は同様である. 電子線は小さな原子によって大きく散乱される. 図 11.7 (a) の場合と同様, 大きく散乱された電子は球面収差によって, 焦点距離が短かくなりピントの合った面で観察すると, 100 Å も広がってしまう (図 11.7 (d)). このため, 原子の像の外形が最小になるように図 11.7 (c) のようにピンボケにする.

11.5 おわりに

“輝度の高い干渉性の良い電子線” の登場によって, 電子の波動関数をそのまま光の波面に変換する手法 “電子線ホログラフィー” が電子顕微鏡とほぼ同等の分解能で実現するに至った. 1968 年に熱電子線を使ったときには, 100 Å の微粒子を点として再生するのがやっとだったが, 1978 年に開発された電界放出電子線で, 同じ金の微粒子内の 2.4 Å の結晶格子までが再生できるようになった. こうしてレンズ収差を再生段階で光学的に補正するというガボールの夢にも近づきつつある. だが, 像質は今一歩である. 原因は, ホログラムの基本となる干渉縞 (図 11.9 ではⒹで示した干渉縞) が十分に小さくないことなどが挙げられる. 最近, 収差補正電子レンズの可能性が先端技術の進展によって拓かれたので, この技術と電子線ホログラフィーを併用し, さらに波長の短い超高圧電子顕微鏡を使えば, 電子顕微鏡の分解能を 1 桁近く向上させることも夢ではない. それには, さらに電子線の輝度を向上させる必要もある. この超高分解能・超高圧ホログラフィー電子顕微鏡は, ナノテクノロジーからバイオテクノロジーに至る広い分野で新しい道を拓くことになると思う.

電子線ホログラフィーの用途は分解能だけではない. 波動関数の位相を読みとることによって, 原子レベルでの観察と同様にミクロの電場や磁場を観察できる. 光子は電荷をもっていないが, 電子は大きな電荷をもっているので, 電場・磁場と直接相互作用する. 電磁場は, 電子線の位相の中に含まれるので, 干渉顕微鏡像として直接定量的に観察できる. 電子線ホログラフィーは, 原子・分子の世界を直接観察したり, その状態を計測したりする上で, 欠くべからざる技術になり, ナノテクノロジーやバイオテクノロジーの分野でますます重要なツールになると信じている.

参考文献

1) A. Tonomura, A. Fukuhara, H. Watanabe and T. Komoda: *Jpn. J. Appl. Phys.* **7** (1968) 295.
2) M.E. Haine and T. Mulvey: Proc. Int. Cong. on Electron Microscopy, Paris, 1950 (Editions de la Revue d'Optique Theorique et Instrumentale, Paris, 1953) 120.
3) T. Hibi: *J. Electron Microsc.* **4** (1956) 10.
4) A. Tonomura, T. Matsuda and J. Endo: *Jpn. J. Appl. Phys.* **18** (1979) 9.

(とのむら・あきら, 日立製作所フェロー／理化学研究所グループ・ディレクター／沖縄科学技術研究基盤整備機構代表研究者)

問題例で深める物理 Problem Answer Discussion 第6回

磁場と電場の相対性

香取 眞理・中野 徹

今回は，マクスウェル方程式での回転の意味，それと関連して磁場と電流密度の関係について述べる．マクスウェル方程式は電場と磁場に関してかなり対称的に書かれていて，電場と磁場が相対的なものであることを示している．しかし電荷に対応する磁荷がないので，電場と磁場の間の完全な対称性は破れている．磁気単極子（マグネティックモノポール）を導入することにより，マクスウェル方程式を対称化する試みについても述べる．

6.1 循環とストークスの定理

川の流れを見ていて，渦巻いている水の流れとそうでない流れは一見して誰でも分かる．その直感を定量的に表現するにはどうすればよいか．流れの中に仮想的な閉曲線 C をとる．渦巻いている流れに対しては，閉曲線に沿った速度成分を足しあげれば，ゼロでない．渦巻いていない流れではゼロになるはずである．そのような量を**循環**（circulation）と呼び，$\Gamma[C]$ と記す．経路 C を微小要素に分けて，それらの一つを $d\boldsymbol{s}$ とする．その微小要素に対する循環 $d\Gamma$ は

$$d\Gamma = u_{\parallel} ds = \boldsymbol{u} \cdot d\boldsymbol{s}$$

である．ここで $u_{\parallel}$ は $d\boldsymbol{s}$ に平行な速度成分である．微小要素を経路に沿って足し上げれば，

$$\Gamma[C] = \oint_C \boldsymbol{u} \cdot d\boldsymbol{s} \qquad (6.1)$$

と表される．流れが渦巻いていれば，$\Gamma[C]$ はゼロでない値をとる．

ストークスの定理が役立つ．ストークスの定理によれば，(6.1) の右辺は経路 C で囲まれた面 S に渡っての面積分で表される．図 6.1 のように，面 S を細かく分割して，その一つを $d\boldsymbol{a}_i$ で表す．$d\boldsymbol{a}_i$ の周縁を C_i で表すと，C_i の和は全体の周縁 C に等しい．なぜなら互いに接する周縁の方向は反対なので，足し算をすると打ち消しあい，残るのは C のみであるからだ．そのような状況では，(6.1) は

$$\Gamma[C] = \sum_i \oint_{C_i} \boldsymbol{u} \cdot d\boldsymbol{s}_i$$

となるが，各微小経路での循環が

$$\oint_{C_i} \boldsymbol{u} \cdot d\boldsymbol{s}_i = (\nabla \times \boldsymbol{u}) \cdot d\boldsymbol{a}_i$$

と表されるというのが**ストークスの定理**である．$d\boldsymbol{a}_i$ の向きは，右ねじを C_i の向きに回したときに進む方向を向くように取る．ここで

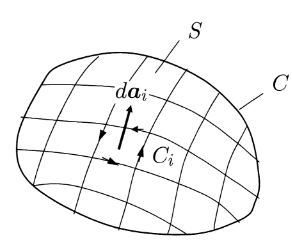


図 6.1 面 S の微小面要素への分割．$d\boldsymbol{a}_i$ の周縁を C_i で表す．

$$\nabla \times \boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} \partial_y u_z - \partial_z u_y \\ \partial_z u_x - \partial_x u_z \\ \partial_x u_y - \partial_y u_x \end{pmatrix} \tag{6.2}$$

である．ただし ∂_x は x に関する偏微分であり，他も同様である．$\nabla \times \boldsymbol{u}$ をベクトル $\boldsymbol{u}$ の**回転ベクトル**と呼ぶ．結局

$$\Gamma[C] = \sum_i (\nabla \times \boldsymbol{u}) \cdot d\boldsymbol{a}_i = \int_S (\nabla \times \boldsymbol{u}) \cdot d\boldsymbol{a} \tag{6.3}$$

が任意の C, S に対するストークスの定理である．

マクスウェルの方程式では発散や回転が**微分形**として現れるが，それの**積分形**としてのイメージを持つのがマクスウェル方程式の直感的な理解に役立つ．

6.2 ビオー–サヴァールの法則

電流は磁場を生じる．電流分布が与えられると磁場はどのように求められるか．静磁場は次の方程式を満たす．

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0, \tag{6.4}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{J}. \tag{6.5}$$

問題 6.1　電流密度が $\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x})$ のときの任意の点での磁場ベクトルを求めなさい．

解答　(6.4) によると $\boldsymbol{B}$ は

$$\boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A} \tag{6.6}$$

のように**ベクトル ポテンシャル** $\boldsymbol{A}$ で表される．この表現を (6.5) に代入すると，

$$\nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{A}) - \Delta \boldsymbol{A} = \mu_0 \boldsymbol{J}.$$

この問題では $\nabla \cdot \boldsymbol{A} = 0$（**クーロン ゲージ**と呼ぶ）と選んでもよいことは次のような理由から分かる．$\nabla \cdot \boldsymbol{A} = f \neq 0$ としよう．$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}' + \nabla\chi$ とおけば，$\Delta\chi = f$ のような χ を用いれば，$\nabla \cdot \boldsymbol{A}' = 0$ であり，しかも磁場は $\boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A} = \nabla \times \boldsymbol{A}'$ として求められるからである．このようなゲージを選べば，

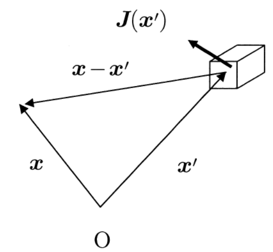


図 6.2　電流密度 $\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}')$ による磁場．

$$\Delta \boldsymbol{A} = -\mu_0 \boldsymbol{J} \tag{6.7}$$

となる．これはポアッソン方程式であり，

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}')}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'|} d\boldsymbol{x}' \tag{6.8}$$

が導かれる．(6.8) を (6.6) に代入すれば，

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \nabla \times \int \frac{\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}')}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'|} d\boldsymbol{x}' = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}') \times (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}')}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'|^3} d\boldsymbol{x}' \tag{6.9}$$

となる．これを**ビオー–サヴァールの法則**と呼ぶ（図 6.2 参照）．■

電流 I が電線の中を流れている場合には，電流が流れる微小体積 $d\boldsymbol{x}'$ を電線に沿っての線分 $d\boldsymbol{s}$ と，それに垂直な断面 da の積で表し，細い電線の断面に渡って積分すれば，$\int_{\text{断面}} \boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}') d\boldsymbol{x}' = I d\boldsymbol{s}$ に帰着する．すると，(6.9) は

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{d\boldsymbol{s} \times (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}')}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'|^3} \tag{6.10}$$

というように電線に沿っての線積分で与えられる．

問題 6.2　真っ直ぐな電線の中を電流 I が流れている．それによる磁場を求めなさい．

解答　(6.10) を適用しよう．図 6.3 のように電流 I が電線の中を流れている場合には，$d\boldsymbol{s} \times (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}')$ は $\boldsymbol{x}'$ の位置に関わらずいつも紙面に垂直で表から裏の方向を向いている．積分の大きさは次のように評価される．電線を z 軸にとり，$d\boldsymbol{s}$ の z 座標を z，点 $\boldsymbol{x}$ の z 座標を $z = 0$ とし，電線からの距離を r とすれば，積分値は

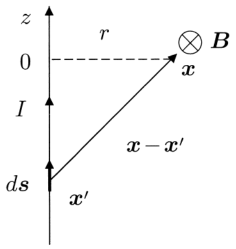


図 6.3　直線電流による磁場.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{z^2+r^2}\frac{r}{\sqrt{z^2+r^2}}dz = \frac{2}{r}$$

であるので,

$$\boldsymbol{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\hat{e}_\varphi \qquad (6.11)$$

である．ここで $\hat{e}_\varphi$ は電線を軸に右ねじを回転した方向の単位ベクトルである．■

(6.11) を得るもっと簡単な方法がある．(6.5) を面 S 上で積分する．すなわち S を $d\boldsymbol{a}$ に分割し，$d\boldsymbol{a}$ と (6.5) の内積を取って，S 上で積分する：

$$\int_S \nabla\times\boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{a} = \mu_0\int_S \boldsymbol{J}\cdot d\boldsymbol{a}.$$

右辺は S を単位時間に通り抜ける電流 I であり，左辺でストークスの定理を用いると,

$$\oint_C \boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{s} = \mu_0 I$$

である．これを**アンペールの法則**と呼ぶ．C として半径 r の円周をとり，電線から r だけ離れた点での磁場の強さを $B(r)$ とすれば,

$$B(r)2\pi r = \mu_0 I \quad \longrightarrow \quad B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}.$$

対称性のよい問題に対してはアンペールの法則を用いるのが便利である．

問題 6.3　円電流の作る軸上の磁場を求めなさい．

解答　図 6.4 のように半径 a の円の導線中を流れる電流 I による中心軸上の P 点での磁場を求める．中心軸を z 軸に選び，円の中心の z 座標を $z=0$，点 P のそれを z とすれば,

$$\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}' = (-a\cos\theta, -a\sin\theta, z),$$

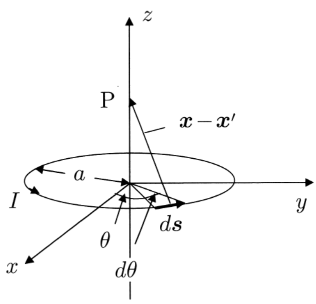


図 6.4　円電流による磁場.

$$d\boldsymbol{s} = (-ad\theta\sin\theta, ad\theta\cos\theta, 0)$$

であるので,

$$d\boldsymbol{s}\times(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}') = (ad\theta\cos\theta\, z, ad\theta\sin\theta\, z, a^2 d\theta).$$

(6.10) に代入して，$\theta=0$ から 2π まで積分すると磁場の z 成分 B_z しか残らない：

$$B_z(z) = \frac{\mu_0 I a^2}{2}\frac{1}{(a^2+z^2)^{3/2}}. \qquad (6.12)$$

■

6.3 電場と磁場の相対性

電場と磁場は独立なものか，それとも相互に関係があるのか．これに対する分かり易い答えは，電荷 q の受ける力を考えることにより得られる．

速度 $\boldsymbol{v}$ で動いている電荷 q の受ける力は

$$\boldsymbol{F} = q(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}) \qquad (6.13)$$

である．この座標系に対して，速度 $\boldsymbol{v}$ で動いている座標系からみれば，電荷 q の受ける力 $\boldsymbol{F}'$ は

$$\boldsymbol{F}' = q\boldsymbol{E}'$$

である．なぜならその座標系では $\boldsymbol{v}=0$ であるからである．しかし等速度で動いている座標系で粒子が受ける力は止まっている座標系での力と等しい．すなわち $\boldsymbol{F}=\boldsymbol{F}'$ でなければならない．言い換えれば，動いている座標系での電場 $\boldsymbol{E}'$ は

$$\boldsymbol{E}' = \boldsymbol{E}+\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}. \qquad (6.14)$$

磁場 $\boldsymbol{B}$ に対して $\boldsymbol{v}$ で動く座標系では $\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}$ の

電場が現れる．

> **問題 6.4**　長さ L の細い導体棒の端をつかんで，磁場 B を軸に角速度 ω で回転させる．両端に生じる電位差 V はいくらか．

解答　回転中心 O から x だけ離れた点での電場は $E' = \omega Bx$ である．したがってこれを $x=0$ から $x=L$ まで積分すると電位差は $\omega BL^2/2$ である．■

もし地球上で長さ 10 m の棒を毎秒 10 回転させれば，地球磁場の大きさ B は約 0.5×10^{-4}T であるから，約 0.15 V の電位差が生じる．

6.4 磁場によるエネルギー密度

前回示したように，電場はエネルギーを持っている．電場と磁場が相対的なものであれば，磁場もエネルギーを持っているはずである．

> **問題 6.5**　電磁場による荷電粒子に対する仕事を計算することにより，磁場のエネルギー密度を計算しなさい．

解答　電荷 q が速度 $\boldsymbol{v}$ で動いていると，$\boldsymbol{F} = q(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})$ の力が働く．すると単位時間になされる仕事は $\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{F} = q\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{E}$ である．単位体積あたりに n 個の電荷があるとすれば，単位時間当たり，単位体積あたりに電磁場がなす仕事は $nq\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{E} = \boldsymbol{J}\cdot\boldsymbol{E}$ である．$\boldsymbol{J}$ に前回の式 (5.4) から得られる $\boldsymbol{J} = \nabla\times\boldsymbol{B}/\mu_0 - \varepsilon_0\partial\boldsymbol{E}/\partial t$ を代入すると，

$$\boldsymbol{J}\cdot\boldsymbol{E} = \frac{1}{\mu_0}(\nabla\times\boldsymbol{B})\cdot\boldsymbol{E} - \varepsilon_0\boldsymbol{E}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}.$$

ここで $\nabla\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{E}) = (\nabla\times\boldsymbol{B})\cdot\boldsymbol{E} - (\nabla\times\boldsymbol{E})\cdot\boldsymbol{B}$ と，前回の (5.3) である $\nabla\times\boldsymbol{E} = -\partial\boldsymbol{B}/\partial t$ を用いると，

$$\frac{\partial}{\partial t}u + \nabla\cdot\boldsymbol{S} = -\boldsymbol{J}\cdot\boldsymbol{E}. \qquad (6.15)$$

ここで $\mu_0 = 1/\varepsilon_0 c^2$ を用いれば，

$$u = \frac{\varepsilon_0}{2}E^2 + \frac{1}{2\mu_0}B^2, \qquad (6.16)$$

$$\boldsymbol{S} = \varepsilon_0 c^2\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B} \qquad (6.17)$$

である．u は電磁場のエネルギー密度であり，$\boldsymbol{S}$ はポインティング ベクトルと呼ばれる．■

(6.17) はエネルギー密度に光速度 c を掛けたものになっているので，$\boldsymbol{S}$ は単位時間に単位面積を通過するエネルギー フラックスである．(6.15) の右辺はジュール熱であるエネルギー損失なので，(6.15) はエネルギー保存則の形をしている．

(6.15) を簡単な問題に適用してみよう．半径が a の円柱状の導線の軸方向に電場 E があり，電流 I が流れている．この場合のエネルギー バランスを考える．定常的な状態を想定しているので，電場，磁場のエネルギーは一定である．しかし単位長さ当たり，単位時間当たり EI のジュール熱がある．そのエネルギーの補充はどこから行われるのか．(6.15) によれば，左辺第 2 項しかない．導線の表面でのフラックス $\boldsymbol{S}$ は，電場は軸方向，磁場は円周方向を向いているので，$\boldsymbol{S} = \varepsilon_0 c^2\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}$ は中心方向であり，B に (6.11) を代入すると，$S = EI/(2\pi a)$ であるので，単位長さ当たり $S\times(2\pi a) = EI$ のエネルギーの補給が表面からある．これがジュール熱と釣り合っている．ジュール熱はポインティング ベクトルによって補給されていることになる．

6.5 磁気単極子

マクスウェルの方程式は電場，磁場に関してかなり対称的に書かれている．電場と磁場は相対的な意味しかないことからも納得される．しかし電場と磁場の間の完全な対称性は破れている．その原因は，電場は電荷によって生じるのに，磁場は電流によって生まれ，電荷に対応する磁荷がないからである．物理法則では対称性が重要な役割を果たすことから磁荷が現れないのはちょっと不思議であるが，現実には磁荷が観測されていないので，やはりそれを形式的にでも導入するのは，『物理の式はできるだけ観測可能な量で記述するのが望ましい』というドグマに反することになる*1)．

*1)　昔の電磁気の本には棒磁石の一端にはプラスの磁荷，他端にはマイナスの磁荷があるような絵がよくあったが，それはあくまで便宜的な表現である．

しかしディラック[1)]により，**磁気単極子**（**マグネティック モノポール**）の概念が導入され，実際には存在するが，観測が難しいので未だ見つかっていないだけと信じる人たちはモノポールの観測に励んでいる．もしモノポールがあれば，マクスウェル方程式がどのように変更されるかは考えるだけでも面白い[2)]．

問題 6.6　磁気単極子があればマクスウェル方程式はどのように変更されるか．

解答　電荷密度 ρ_e と電流密度 $\boldsymbol{J}_e$ に対応するものとして磁荷密度 ρ_m と磁流密度 $\boldsymbol{J}_m$ が現れるはずである．前回の (5.2) と (5.3) が修正を受けて，

$$\nabla\cdot\boldsymbol{B}=\alpha\rho_m, \qquad (6.18)$$

$$\nabla\times\boldsymbol{E}=-\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}+\beta\boldsymbol{J}_m. \qquad (6.19)$$

ここで便宜的に未定定数 α,β を挿入しておいた．

前回で示した電荷の連続の式と同じように，磁荷の連続の式も次のように導かれる．(6.19) の発散をとり，(6.18) の時間微分と結びつければ，

$$-\alpha\frac{\partial\rho_m}{\partial t}+\beta\nabla\cdot\boldsymbol{J}_m=0$$

が得られる．$\beta=-\alpha$ と選べば，磁荷の連続の式も満足される．$\alpha=1,\beta=-1$ と選べばよいであろう．したがって

$$\nabla\cdot\boldsymbol{E}=\frac{\rho_e}{\varepsilon_0}, \qquad (6.20)$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{B}=\rho_m, \qquad (6.21)$$

$$\nabla\times\boldsymbol{E}=-\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}-\boldsymbol{J}_m, \qquad (6.22)$$

$$\nabla\times\boldsymbol{B}=\mu_0\boldsymbol{J}_e+\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t} \qquad (6.23)$$

が磁気単極子を考慮した一連の式である．■

電荷の基本単位は e であるが，磁荷の基本単位 g はいくらであるか．それに対する答えはディラックにより与えられている．磁荷と電荷は対になっていて，電荷がモノポールの近傍を通りすぎる際に受ける角運動量が量子化されるとの要請から，

$$eg=nh \quad (n\text{ は整数}) \quad \longrightarrow \quad g=\frac{nh}{e} \qquad (6.24)$$

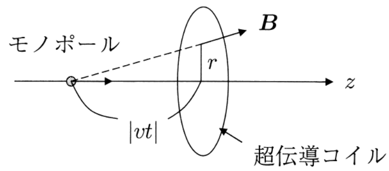


図 6.5　モノポールの観測．

が導かれる．

モノポールを測定するのは原理的には極めて簡単である．図 6.5 のような超伝導体でできた円形コイル（インダクタンス L）を用意し，モノポールがコイルを通過するときに流れる電流の変化を測定する．どのような電流がコイルに流れるかを知るために，(6.22) をコイルの作る面 S にわたって面積分する：

$$-\int_S\nabla\times\boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{a}=\frac{\partial}{\partial t}\int_S\boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{a}+\int_S\boldsymbol{J}_m\cdot d\boldsymbol{a}.$$

左辺はストークスの定理を用いるとコイルに生じる起電力 $\mathcal{E}$ であり，右辺第 1 項はコイルを貫く磁束 φ の時間変化である．まとめて書くと，

$$-\mathcal{E}=\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\int_S\boldsymbol{J}_m\cdot d\boldsymbol{a}.$$

コイルに生じる起電力により電流 $I(t)$ が誘起されるが，コイルのインダクタンスによる逆起電力 $-LdI/dt$ が起電力 $\mathcal{E}$ と釣り合う：

$$L\frac{dI}{dt}=\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\int_S\boldsymbol{J}_m\cdot d\boldsymbol{a}. \qquad (6.25)$$

図 6.5 のようにモノポールが z 軸に沿って左側から飛んできて，ちょうど $t=0$ にコイルを通過するとしよう．すると

$$\int_S\boldsymbol{J}_m\cdot d\boldsymbol{a}=g\delta(t)$$

である．これを (6.25) に代入して，(6.25) を $t=-\infty$ から t まで積分すると，

$$LI(t)=\varphi(t)+g\theta(t) \qquad (6.26)$$

である．ここで $\theta(t)$ は $t<0$ ではゼロ，$t\geq 0$ では 1 の**ヘビサイド関数**である．最後に時刻 t に半径 a のコイルを貫く磁束 φ を求めよう．図 6.5 の時刻 t でのモノポール g による磁場は，電荷と

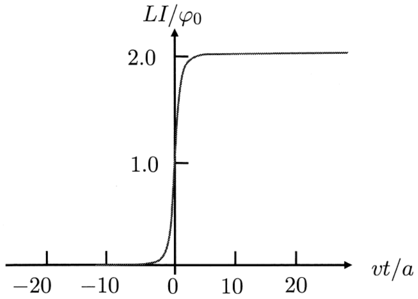


図 6.6　コイルを流れる電流変化．$n = 1$ としてある．

電場の関係式（前回の (5.9) 式）と同じで，

$$\boldsymbol{B} = \frac{g}{4\pi}\frac{1}{(vt)^2 + r^2}\hat{n}$$

である．ここで $\hat{n}$ は図 6.5 の $\boldsymbol{B}$ の方向の単位ベクトルである．コイルの半径を a とすれば，

$$\begin{aligned}\varphi(t) &= \frac{g}{4\pi}\int_0^a \frac{1}{r^2 + (vt)^2}\frac{-vt}{\sqrt{r^2 + (vt)^2}}2\pi r dr \\ &= \frac{g}{2}vt\left[\frac{1}{\sqrt{a^2 + (vt)^2}} - \frac{1}{|vt|}\right] \\ &= \frac{g}{2}\left[\frac{vt}{\sqrt{a^2 + (vt)^2}} + 1 - 2\theta(t)\right]\end{aligned}$$

であるから，(6.26) より

$$LI(t) = n\varphi_0\left[1 + \frac{vt}{\sqrt{a^2 + (vt)^2}}\right] \quad (6.27)$$

である．ここで g に (6.24) を代入した．φ_0 は超伝導コイルを貫く量子化された磁束単位 $h/2e$ である．$I(t)$ の時間変化は図 6.6 のようになる．モノポールが来る前は電流が流れていないコイルに，モノポールがコイルを通り過ぎると，

$$LI = 2n\varphi_0 \quad (6.28)$$

だけの電流が永久に流れ続けることになる（超伝導コイルには抵抗がない）．

モノポールのエネルギーは極めて大きく，ビッグバンの初期の高エネルギー状態の宇宙で作られる．生き残ったモノポールがたまたま測定器のコイルの中に飛び込んでくると，(6.28) のような電流が流れることになる．1982 年にモノポールが見つかったとの報告[3)]があったが，他の研究者によるその後の報告はない．現在は加速器実験でも観測が試みられている[4)]．

参考文献

1) 本誌 2007 年 9 月号，特集「ディラック」が面白い．
2) モノポールの理論については，同上の pp.28–33 の大貫義郎氏の解説を見てほしい．
3) B. Cabrera, *Phys. Rev. Lett.* **48**, 1378 (1982).
4) モノポール探しの実験については，荒船次郎，本誌 2006 年 12 月号 pp.50–54 の解説がある．また M. Kimball, *Report on Progress in Physics* **69**, 1637 (2006) にも詳しい解説がある．

（かとり・まこと，中央大学理工学部）
（なかの・とおる，中央大学理工学部）



数学の道しるべ
～研究者の道とは何か～
第9回

駆け出しの頃を思い出して

小 野　薫

この原稿を引き受けて，これまでの数学研究を振り返ってみた．学生のときから現在に至るまで，様々な方々のお世話になったことを改めて感じた．これからの文章に面白い話があるわけではなく，研究者になろうとする方々の参考になるかどうかも分からないが，学生の頃から，研究者になった頃のことを思い出しながら書こうと思う．

1. 大学生の頃

大学初年級のときに，基礎的なものから少し背伸びしたものまで色々な数学の本を，仲間との輪講あるいは一人で読み，少しずつ理解を進めていった．第４回の河東泰之さんの文章にも出てきたが，東大の物理学研究会というサークルで，先輩から本を勧められたり，同級あるいは後輩と輪講する中で学んだり，教えてもらったことも多かった．そうした中で，分からないことと時間をかけて付き合うことに慣れていった．２年の後期に数学科に進み，数学について話をしたり，輪講をする同級生も増えた．

４年になるとセミナーが始まり，私は服部晶夫先生のご指導の下で森吉仁志さんと一緒に指数定理を勉強をした．森吉さんとは３年のときから一緒に輪講をしていて，頼りになる同級生だった．私にとっては４年のときのセミナーから得たものは大変大きく，それからの勉強の基盤になった．12月の最後だったと思うが，指数定理の応用を扱った論文を森吉さんと私がそれぞれ一つずつ紹介するというセミナーをすることになり，そのときだけは何人か大学院の先輩が出席された．我々が話し終えた後，一つ上の古田幹雄さんが「この結果は拡張できますね」と説明をされたが，私にはよく分からなかった．（少し経ってから，服部先生が松本幸夫先生から古田さんが言われた結果は Rochlin の論文にあると聞かれたとのことだった．）数学の研究が進められる様が見えたようで印象的だった．

2. 大学院生の頃

大学院修士課程に入ると，服部先生のセミナーでは修士１年は先生から薦められたいくつかの論文からどれかを選んで発表することになった．森吉さんは，いち早く方向を決め（確か）Baum–Douglas の論文を選び，それに続いて指数定理と作用素環の研究へと進んでいった．私は，Atiyah–Bott の同変 cohomology の論文と Witten の Supersymmetry and Morse theory を読むことにした．（後者についてはうわべしか説明できなかった）その後もいくつかの論文についてセミナーをしたが，自分の研究となるとなかなか思うようには進まなかった．自分なりに考えてできたことは，調べて

みると以前の論文にあることも何回かあった．そのような状況では修士論文は書けないので，1年留年した．現在はどうかは知らないが，当時は修士論文の審査の前に，その予行演習を兼ねてか誰でも聴きに行ける修士論文の発表会があった．同級生の発表を聞くと，しっかりとした内容の発表が続いて，自分が取り残されたような気もしたが，とにかくもう一年やってみるしかなかった．

このような状況で服部先生からはセミナーなどで励まして頂き，また，大阪市立大学に移られた枡田幹也さんからも「興味がいろいろあるのはよいが，まずは一つの方向に絞ってやってみたほうがよい」との御助言，励ましのお手紙を頂き，Kirwanの論文のコピーを送っていただいた．色々試みているうちに，前の年に考えていたことを少し違った形で見ることでちょっとした結果も得られ，気持ちも少し楽になった．あるとき，夏に表現論の研究集会にVergne氏が来られることを知った．Berline氏との共同研究で得られた指数定理の別証明に関心のあった私はその機会にVergne氏に質問できればと研究集会に行った．研究集会にもそれほど参加した経験がなく，どう話しかけたらよいのか迷っていたが，小林俊行さんに背中を押されて少し話をすることができた．このことが契機となり，彼女たちの論文を見直していると，以前に砂田利一先生の講演などで聞いたBrooksの定理と組み合わさることで基本群がある性質を満たすスピン多様体のDirac作用素はスカラー曲率が零であってもその指数が消えることに気付いた．それを少し膨らませた結果を服部先生に報告すると，隣の部屋に居られる落合卓四郎先生に話を聞いてもらうのがよいと仰り，両先生の前で話をした．私が話し終わると，落合先生から加藤の不等式を知っているか，それを使っても証明できるだろうとのコメントを頂いた．実際に少し後でMathai氏は私の結果に加藤の不等式を使った別証明をつけ，今から数年前にはその流れでDevaux氏が私の結果の精密化もしている．せっかくのご助言を活かせなかったのは私の力不足と感じている．

留年したからといって研究結果が出る保障のない1年だったが，いくつかの結果を修士論文として纏めることができ，博士課程に進めることになった．博士に入った年の夏学期にsymplectic幾何で著名なWeinstein教授が滞在され，Poisson幾何学の講義をされた．私は，杉山健一さん（このことに限らず杉山さんには実に色々なことを教えていただいた）と一緒にノートの作成係になったことで，Weinstein先生と話をする機会を持つことができた．談話会では，FloerのArnold予想に関する新理論の紹介をされた．それに興味を持った私は，Weinstein先生にプレプリントか何かをお持ちかどうか尋ね，5つか6つの関係するプレプリントを貸していただき，コピーを取った．眺めてみたものの，すぐに理解できたわけではなかった．少し経ってから，当時助手をされていた古田さんが一緒に読んでみようと言われ，何度かセミナーをした記憶がある．詳細はともかく，全体の流れは分かってき始めた．博士1年の冬に，東北大学から助手に来ないかという有難い話があり，次の4月から仙台に赴くこととなった．そこでそのセミナーは打ち切りになってしまった．

この頃小林さんとHirzebruchの比例原理は特性数だけでなく，特性類に対して成り立つだろうと議論をしていた．それぞれ別の動機があったので，私としては自分の問に答えが得られただけでなく，小林さんの問題意識や考え方の一端に触れることができ楽しかった．私が赴任するまでに形にしようと時間的制約がある中で，夜遅くまで議論していたこともよい思い出である．

3. 就職して

仙台に行って最初の1年間は，演習の担当もなく，自分の研究だけをすればよい状況だった．他に何の義務もないのだから何でもよいから毎週土曜日に話すように板東重稔さんから言われ，Lagrange部分多様体のFloer homologyの紹介をすることにした．板東さんは秋からBonnのMax Planck研究所に長期出張されてしまったが，教養部に居られた陶山先生，浦川先生，秋からは帰国された剱持先生にも聞いて頂いて，このセミナーはほぼ1

年間続けた．このセミナーは私の現在に続く研究の基礎となった．その翌年だっただろうか，伊藤秀一さんが東北大学に赴任された．伊藤さんからは，Hamilton 系のことを色々聴かせていただいた．入手された Hamilton 系の Floer homology や symplectic capacity のプレプリントを頂いて，それらを勉強しながら，自分でも何ができるかを探り始めていた．

前後するが，助手になった年に Berkely にある研究所 MSRI から symplectic 幾何の研究集会に招待された．偶然，その少し前にメーン州の Bowdoin College で指数理論と作用素環，楕円種数に関する 2 つの研究会があると服部先生から伺い，合わせて出席することにした．私にとっては初めての外国だった．もともと英語には苦手意識があったのだが，到着早々道で子供に話しかけられて何を言っているのか分からず，全く自信がなくなった．英語も良く分からないし，講演が行われていた部屋の照明が暗く，黒板もよく見えなかったので Bowdoin では研究集会中に入手した Bott–Taubes の楕円種数の剛性に関するプレプリントを読んでいた記憶がある．研究集会の後 1 週間ほど，森吉さん（Bowdoin でも一緒だった）と齋藤睦さんのところに（引っ越しを控えたお忙しい時期だったにも関わらず）お世話になり，そのあと Berkely に行った．MSRI での研究集会では，Floer, Hofer, Viterbo の 3 氏による連続講演が中心で，現在 symplectic homology と呼ばれている理論と symplectic capacity についてのものだった．Eliashberg 氏の講演もそこで初めて聴いた．確か，overtwisted contact structure について講演していた．（内容は分からなかったが黒板に書かれた絵を覚えている．）他にも，論文を通して名前だけは知っている研究者の講演がいくつもあり，この分野が急速に進展していることは分かった．招待を受けたが参加できなかった Givental 氏から Weinstein 氏への手紙のコピーが配られた．そこには現在 Arnold–Givental 予想と呼ばれている問題が提起されていた．それを見られた服部先生が「これは筋が良いんじゃないか」と仰っていたのを覚えている．Yong-Geun Oh 氏と初めて会ったのがこの研究集会で，彼と私の 2 人の若手が短めの講演をした．

1990 年の冬だったと思うが，MSRI に滞在中であった浦川先生から面白そうな研究集会があるので来たらよいのではないかと情報を頂き，出かけて行った．そこでは，Stolz 氏の Gromov–Lawson 予想の解決の講演，自己交点数が非負の擬正則曲線を含む 4 次元 symplectic 多様体に関する McDuff 氏の講演，負曲率多様体の微分構造に関する Farrel-Jones 氏の講演などがあった．Stolz 氏の講演ではセミナーの先輩の宮崎哲郎さんの定理が用いられていた．擬正則曲線の理論は少し勉強していたので，McDuff 氏の講演の骨子はよく分かった．その議論を少しは拡張できるかと考えてみたが，うまくいかず，ちょうど話がうまく進むところを扱っていることも分かった．この年は，夏に UCLA で微分幾何の研究集会や京都での国際数学者会議があり，多くの話を聞く機会があった．興味ある講演もあり，刺激にはなったが，それほど多くのことを消化できるわけでもない．色々な話がありすぎて，聴き疲れてしまった．年末に Sicilia 島の Palermo で，Dirac 作用素の研究集会があった．小規模ながら，面白い講演があり，楽しい集会だった．

何人かの先生から一度外国で勉強する機会を持つこともよいと助言を頂き，板東さんから情報を頂いて，私も Max Planck 研究所に応募してみることにした．しばらくして，最初は 1991 年 1 月から 1 年間の招待状が送られてきた．その後で，Hirzebruch 所長から 9 月からの 1 年間 Kreck 氏が中心となった活動があるので，時期をずらしてはどうかと助言があったので，そうすることにした．Bonn に行く時期を遅らせることを決めてから，お茶の水女子大学から誘いを受けた．9 月から出張する予定があることも話して，その計画を認めてもらって，1 月半ばにお茶の水女子大学に移った．ちょうどその頃，深谷賢治さんと古田さんが中心になり，後に Geometry and Everything と名付けられたセミナーを始められた．私も何か

話すことになり，上で述べたMcDuffの仕事について何回か話すことにした．その機会に詳細を検討したことは後々役立った．(そのときは論文にある主張より弱い形が成り立つことまでは話せたが，そこからは大体の感じを話してお茶を濁した．実は元の主張を得るには足りないことがあり，それが埋められたのはその数年後であった．)

4. 海外での研究生活

8月末にBonnに着くと，Kreck氏に加えてGompf, Lott, Stolzといった研究者が滞在していた．通常のセミナーが始まる前に，少し短い話をする機会があり，Kreck, Stolz両氏のほか数名の大学院生が聞いてくれた．ドイツの習慣を知らず，話し終えたときに皆揃って机を叩いていたので，つまらない話をしてしまったのだと思ったことを覚えている．その頃Max Planck研究所には多くの日本人研究者が訪れていた．私は2年間滞在したが，その間第一線で活躍しておられる村瀬元彦さん，二木昭人さん，金井雅彦さん，山口孝男さんと親しく話をしていただいて研究上の刺激も受けた．同年代の今井淳さん，小木曽啓示さんとも親しくさせてもらい，教えてもらうことも多かった．優秀な若い研究者，学生も色々いてGöttshce, Huybrechts, Kontsevichたちが同じ階にいた．

1年目はKreck氏が主催するセミナーがあったこともあり，私もトポロジーに関わることを考えていた時間が多かった．Bonnに着いて間もない頃S.S. Roanという研究者から質問を受け，問題を説明された．彼が説明してくれたことからすると，あとは同変K-群のことを少し知っていれば分かる問題であり，彼が期待した通りの結果が得られた．私の関わった部分は大したことではないが，初めての海外長期滞在の最初ということもあり，心理的には良かった．(自分の研究に自信が持てていなかったということです．)

その頃Gompf氏は現在Gompfのファイバー和と呼ばれるsymplectic多様体の操作を研究し始めた頃だった．未だsymplectic幾何の基本的文献を探していて，私が親しくしていたY. Liさんを介して問い合わせが回ってきた．そのような縁で，Gompf氏の仕事を詳しく聞く機会が持てたことはよかった．Liさんのお陰と言えば，Yongbin Ruanさんと知り合いになったのも彼を介してであった．その頃，Liさんは大学院で同級だったRuanさんからの代数幾何の質問を色々受けていたようで，書き上げた論文がLiさんに送られてきた．それは代数曲面と射影直線の直積のsymplectic構造を然るべき擬正則曲線の数を数えることで区別するという研究で，現在Gromov–Witten不変量と呼ばれるものの特別な場合を用いた仕事だった．Liさんがその論文を見せてくれたので，読んでみると，そこで扱われている具体例についてはそんな大道具を使わなくても区別できる感じを持った．落ち着いて考えると，その論文で扱われている例については古典的な方法で簡明に区別できることが分かったので，Ruanさんに手紙を書いた．すぐに正しいと思うとの返事を貰った．後になって聞いたが，それから私の議論では区別できない例を作ろうと頑張ったとのことだった．(Gross氏と議論してそういう例をいろいろ見つけたのだという．)

私自身の考えていた問題はと言えば，日本に居るときから気になっていたEdmondsの定理のループ空間版という問題に決着を付けようと計算をした．通常のEdmondsの定理は，多様体にスピン構造を保って作用する対合の不動点集合は向き付け可能であるというものであるが，そのループ空間版は対合の不動点集合がスピン構造を許容するかという問いに関わる．良さそうにも思えるが，不安の残る議論を持ってはいたが，正しいという自信が持てなかった．何かの折にStolzさんに話してみると興味を持ってくれて議論をするうちに，より分かりやすい定式化ができた．少し経って問題は解けたが，その解け方が期待していたものとは違ったことには2人とも落胆した．

その結果をある研究集会で話したところ，ほとんど反応はなかったのだが休憩時間にOhさんが「その結果は，Lagrange境界条件付き擬正則曲線のモデュライ空間の向き付け問題を思い起こさせ

る」と言ってきた．そのときまで，Oh さんがコメントした問題には特に関心を持っていなかったのだが，それ以降頭の隅にこの問題を置くようになった．(その数年後の深谷，太田啓史，Oh の 3 氏と私の共同研究と直接関わるわけではないが，何か感じが似ていると言えないこともない．)

並行して，Hamilton 微分同相写像の不動点の個数を下から評価しようという Arnold 予想に関する Floer の仕事を少しでも拡張しようと考え，4 次元の場合ならば何とかなるのではないか試していた．手始めに第一種例外曲線（の symplectic 版）がない状況で考えてみると，ある Floer の論文の序文にあるアイデアが実現されそうだと分かった．条件を外しても 4 次元ならばうまく行きそうだ．そんなとき，研究所で同室だった Hoil Kim さんが Warwick 大学での研究会から帰ってきて，ノートを見せてくれた．すると，Dietmar Salamon 氏が，私が考えていることと大変近いことを講演していたことが分かった．彼と Hofer 氏の共同研究についての講演で，多様体の次元は 4 とは限らないが 4,6 次元では自動的に成り立つ弱単調性という条件と 4 次元でも必ずしも成立しない最小 Chern 数についての条件が付いている．そういうわけで，私が考えていたことが完全に含まれていたわけではなかった．とにかく，Salamon 氏に手紙を書いて連絡を取った．手紙には関連する質問も書いた．すぐに私の議論の中で気になる部分の指摘と，私の質問に関する答えの書かれた返事が届いた．文面は競争を気にするようなものでは全くなく，新しく参入する者への友好的なものであった．彼から指摘された部分をきちんと詰め，弱単調性のみ課した状況に拡張するにはそれから数カ月掛ったように記憶する．この頃，村瀬さんからは，「同じようなことをやっている人が居ても，自分がやり切ることが大事である」と励まして頂いた．

とにかく東北大学に行く前から勉強だけはしていた Floer homology について少しでも成果が得られたことは嬉しかった．関連する研究も，ちょうど Max Planck 研究所に滞在していた Hong Van Le さんとの共同で進めることができた．これらを論文に纏めて，Hofer, Salamon, Zehnder といった Floer homology の専門家に送った．それぞれの大学へ呼ばれて，講演や議論をした．このように書くとうまくいったかのようであるが，Salamon さんと Warwick 大学で議論していると，実は彼らの議論でも詰め切れていないところ（自励 Hamilton 系に対する Floer 複体を Morse 複体と比較する際後者の勾配曲線は前者にも寄与する．前者にそれ以外の勾配曲線があるとすると，その横断性が問題であった．）があるのだと話してくれた．私はその点は大丈夫だと思っていたのだが，改めて考えてみるとちゃんとした証明が付けられない．深刻さに気付いてその後はこの問題で頭が一杯になった．とにかくお互い考え続けようと話した．滞在の終わりに，翌年の秋から Newton 研究所で symplectic 幾何学の企画を計画しているので来ないかと誘われた．都合が付けられれば行きたいと答えて別れた．Warwick 大学訪問の後は，上の問題で頭が一杯だった．帰りがけに，Le さんと London 観光をしたのだがよく覚えていない．Bonn に戻ってから 1，2 週間必死に考えて，きれいな議論ではないけれども何とかねじ伏せることができた．論文を書きなおして Salamon さんに送った．それからしばらくして彼らは別の方法でこの問題を乗り越えたと知らせがあった（Floer–Hofer–Salamon の共著，これは Floer が亡くなってから 2 年ほど後のことだが，Floer もその問題を考えていたということだろう）．後で日本に戻ってから，前の節で触れた Geometry and Everything で Arnold 予想についての部分的解決について話したことがあった．夕食を挟んで，最後に上記の問題点を乗り越える議論を説明した．長時間のセミナーであったが，皆さん元気で，深谷さんや古田さんからは，もう少し簡潔に纏められそうなアイデアなどの建設的な意見を頂いたことを覚えている．

Bonn 滞在も最後になった頃，Claude Viterbo さんから「Poincaré 研究所の Emil Borel Center で symplectic 幾何の学期を計画している．fellowship 申請は Hofer さんが推薦状を書いてくれる

と言っているから来ないか」という誘いを受けた．長期出張の後にも関わらず，お茶の水女子大学から日本で冬学期の授業が終わってから4月頃まで行くことの許しをもらった．そこでは，セミナーだけではなく連続講義が行われていて，私もそのいくつかを聴いた．Arnold さんは大学院生向けに，題目は覚えていないが，確か特異点の講義をしていたように思う．私と共同研究をしていた Le さんはモスクワ大学の出身だったので，Arnold さんに紹介してくれた．最初は，Le さんから私が Arnold 予想について仕事をしていると聞いても特に何の反応もなかったのだが，翌週になって Givental から私の仕事を聞いたと言ってくれて，同じ考え方が適用できるかもしれない問題があると言ってある問題を教えてくれた．Paris に居る間には解決できなかったが，日本に戻っても考え続け，その夏 Newton 研究所に滞在している間に解決することができた．

夏休みに入って Newton 研究所に行くと，深谷さんと同じ部屋になった．確か研究集会（Donaldson の Bertini の定理の symplectic 版などの講演があった）が開かれている2週間の間だけしか滞在は重ならなかったと思うが，時間の割には色々議論をした．深谷さんに，一般に Arnold 予想（の homology 版）を解決するためには何が問題となっているのかを聞かれた．私の考える困難を話すと，しばらくして，それを乗り越えるには既にゲージ理論で使われているアイデアが有効そうだと言われ，何日か議論をした．私は周りの人の話を通してゲージ理論を知っている程度だったので，実際の研究に携わっている人の理解には程遠かった．私の理解が足りていれば，その時点でもっと議論が深まっただろう．Newton 研究所滞在の後しばらくは形にはならず，アイデアが実現されたのは，その1，2年後のことになる．

5. 現在の研究へ

日本に帰って数カ月すると Seiberg–Witten 理論のニュースが伝わってきた．Newton 研究所での講演ノートのコピーなども何処からか入手した．進展も早く，Taubes の4次元 symplectic 多様体に関する論文なども出回っていた．そういう状況で，4次元 symplectic 多様体に関して具体的にどのような応用ができるかを少し考えてみた．あるとき太田啓史さんと話をすると，彼も同じようなことを考えていることが分かり，共同で研究することにした．太田さんとは彼が大学に入った頃からの付き合いで，共同研究こそしていなかったが，議論は色々していた．自然な流れで，現在に至っても4次元 symplectic 充填などについて折にふれて共同研究している．

Newton 研究所で始まった深谷さんとの Arnold 予想や Gromov–Witten 不変量の構成についての議論はしばらくそのままになっていたが，1995年の末に形となり始め，翌年の春には論文として纏まった．続いて，深谷さんとそこで開発したアイデアが適用できる問題はあるかと考えた．まずは，前に述べた Lagrange 部分多様体に関する Arnold–Givental 予想というのがあり，その場合を考えるのは自然な問題と思えた．この予想については Oh さんが特別な場合に証明していた．1996年の夏に Ascona で開かれた研究集会で Oh さんと一緒になり，太田さんも交えて4人での共同研究がそこから始まった．当初自然と思えた問題であったが，なかなか一筋縄ではいかず，この予想に関しては現在でも満足できる解答には至っていない．4人での共同研究は，Lagrange 部分多様体の Floer 理論の一般的枠組みを厳密に作る方向に進み，それから12年半経った現在最終版を仕上げているところである．この1年ほどは我々の理論を具体的な場面で応用する研究も進めている．

以上，今までの自分の研究の流れを，学生の頃から何とか一人前の研究者になったころまでを思い出してみた．ここで書いた他にも色々な方々に助けていただいたり，共同研究をさせていただいた．服部先生始めお世話になった方々と先の見えない学生時代から私を見守ってくれた両親に感謝して筆を置く．

（おの・かおる，北海道大学大学院理学研究院）

特　集（2009 年 8 月号予告）

複素数
その奥深い魅力と広がり

本体 952 円

編集後記

対称性やくり込み群といった言葉は素粒子と物性の双方に登場して，今や現代物理を学ぶ際には，数学における微積分や線形代数と同じように必須のキーワードになっているようです．

昨年，ノーベル物理学賞を受賞された南部陽一郎さんは素粒子と物性の両方に興味を持っていたそうです．南部さんに限らず幅広く興味を持っている人の思考はとても柔軟なように思います．

私も柔軟な思考を身につけられるよういろいろ見聞を深めたいものです．（R）

数　理　科　学　7月号

2009 年 7 月 1 日発行

数理科学編集部　　発行人 木　下　敏　孝
TEL. (03) 5474–8816
FAX. (03) 5474–8817

ホームページ　http://www.saiensu.co.jp
ご意見・ご要望は　sk@saiensu.co.jp　まで．

発行所 ⓒ 株式会社 **サ イ エ ン ス 社**　TEL. (03) 5474–8500（代表）
〒 151–0051 東京都渋谷区千駄ヶ谷 1–3–25　振替 00170–7–2387　(03) 5474–8600 (広告部)

印刷・製本　三美印刷株式会社　山岡景仁